UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

Depto. de Matemáticas Puras y Aplicadas

MA - 2113

Matemáticas VI

Ejercicios de Superficies Parametrizadas
y
Variable Compleja

Segunda Edición corregida y aumentada.
Abril 1998

Prof. Rafael Jacinto Morales Bueno

Prólogo

Las notas a continuación, no pretenden ser sustitutos de los textos recomendados por el Departamento de Matemáticas para el curso de MA-2113; el único fin de las mismas es el de ayudar al estudiante a entender mejor la materia, tratando de simplificar su enseñanza. El texto se divide en 18 capítulos, en cada uno de ellos se hace un resumen de la teoría correspondiente, lo cual servirá como una guía de repaso a los contenidos teóricos.

Se presentan ejercicios resueltos, algunos son originales, otros se han tomado de guías redactadas por profesores o preparadores del Departamento de Matemáticas, también hay ejercicios tomados de exámenes de MA-2113. En esta segunda edición, se agregan ejercicios a los importantes capítulos 15, 16 y 17.

He tratado de ser lo más didáctico posible y espero prestar un apoyo a la enseñanza de las Matemáticas Generales. Probablemente se encontrarán algunos errores, agradezco las observaciones y sugerencias que puedan hacerme (éstas pueden ser enviadas a mi casillero en el Dpto. de Matemáticas).

Finalmente, deseo agradecer al Prof. Luis Mata, por su entusiasmo y ayuda, al equipo de preparadores que colaboró en la corrección y redacción final de las notas: Aryelly Rodríguez y Yolanda Perdomo, a los profesores del departamento quienes gentilmente leyeron los originales y me hicieron valiosas observaciones y, en especial, a los bachilleres Mónica Salvioli y Gerardo Martínez, quienes además dedicaron bastante de su tiempo en la elaboración del material impreso, y al licenciado José Infante y la bachiller Saidiana Viccionace, quienes se ocuparon de los dibujos. También debo agregar en la lista de colaboradores al bachiller Verónica Mata quien tuvo a su cargo la corrección en Latex de los últimos errores encontrados para esta segunda edición.

Recomendación importante para utilizar este libro:

El repaso teórico, que se hace al comienzo de cada capítulo, es necesario para que el estudiante se familiarice con cada tema. Luego, se le aconseja leer con detenimiento cada pregunta, intente resolverla y en última instancia recurra a leer la solución.

Primera Edición Sartenejas, 1997.

Segunda Edición corregida y aumentada. 1998.

Esta documentación fue realizada en LaTeX.

Con el objeto de hacer futuras correcciones a esta guía de Matemáticas VI, se le agradece a las personas que deseen colaborar, y en especial a los estudiantes, llenar estas páginas y otras si fuesen necesarias. Por favor depositarlas en el casillero del Profesor Morales Bueno.

Página #	Linea #	Donde dice:	Debe decir:

Página #	Linea #	Donde dice:	Debe decir:

Índice General

Parte I

Cálculo Integral (Teorema de Stokes)

Capítulo 1

Superficies parametrizadas.

Objetivos: El principal objetivo es saber calcular la ecuación del plano tangente a una superficie parametrizada, en un punto dado y el cálculo del área de dicha superficie.

Producto vectorial fundamental. Plano tangente. Area de una superficie parametrizada.

1.1 Definiciones

(a) *Definición.* Sea D un dominio en $\mathbb{R}^2$, Φ una función definida por:

$$\begin{cases} \Phi : D \subset \mathbb{R}^2 & \to \quad \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \to \quad \Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \end{cases}$$

de modo que x, y y z componentes de Φ son a su vez funciones escalares:

$$\begin{cases} x : D \subset \mathbb{R}^2 & \to \quad \mathbb{R} \\ (u,v) & \to \quad x(u,v); \end{cases}$$

$$\begin{cases} y : D \subset \mathbb{R}^2 & \to \quad \mathbb{R} \\ (u,v) & \to \quad y(u,v); \end{cases}$$

$$\begin{cases} z : D \subset \mathbb{R}^2 & \to \quad \mathbb{R} \\ (u,v) & \to \quad z(u,v). \end{cases}$$

Entonces, se define *Superficie Parametrizada* a la imagen $\mathcal{S} = \Phi(D)$.

Si Φ es diferenciable o de clase $\mathcal{C}^1(D)$ (es decir, x, y, z son funciones diferenciables sobre D o sus derivadas parciales primeras son continuas sobre D), en tal caso se dice que Φ es una *Superficie diferenciable* o $\mathcal{C}^1$ sobre D.

(b) *Definición.* Sea Φ una superficie diferenciable sobre D, se definen los vectores $T_u \;\; y \;\; T_v$, *vectores tangentes* a $\mathcal{S}$ en $\Phi(u_0, v_0)$, (u_0, v_0) algún punto de D por:

$$(T_u)_{(\Phi(u_0,v_0))} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0,v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\vec{k}$$

$$(T_v)_{(\Phi(u_0,v_0))} = \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0,v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\vec{k}$$

tales vectores, son tangentes a dos curvas sobre $\mathcal{S}$ en $\Phi(u_0, v_0)$ respectivamente; por lo tanto, el producto vectorial $(T_u \times T_v)_{\Phi(u_0,v_0)}$ es perpendicular a $\mathcal{S}$ en el punto $\Phi(u_0, v_0)$.

(c) *Definición.* El vector $T_u \times T_v$ evaluado en $\Phi(u_0, v_0) = (T_u \times T_v)_{\Phi(u_0,v_0)}$ es el *Producto vectorial Fundamental asociado a* Φ en $\Phi(u_0, v_0)$, también se le nombra abreviadamente como Producto Vectorial Fundamental a $\mathcal{S}$ en

$\Phi(u_0, v_0)$. (Para simplificar pondremos $(PVF)(u_0, v_0)$).

(d) *Definición.* Una parametrización Φ de una superficie $\mathcal{S}$ es *suave* en $\Phi(u_0, v_0)$ si $(PVF)_{\Phi(u_0,v_0)} \neq (0,0,0)$. (Es decir, si $T_u \times T_v$ evaluado en $\Phi(u_0, v_0)$ es $\neq (0,0,0)$). En tal caso, es costumbre decir que $\mathcal{S}$ *es suave* en $\Phi(u_0, v_0)$. Y si $(PVF) \neq (0,0,0) \ \ \forall \ \Phi(u_0, v_0)$ en $\mathcal{S}$ se dice que $\mathcal{S}$ *es suave.* Los puntos donde $T_u \times T_v = (0,0,0)$ son *puntos singulares* y aquellos tales que $T_u \times T_v \neq (0,0,0)$ son *puntos regulares.*

En sentido estricto, podemos decir que la suavidad depende de cada parametrización Φ y no de $\mathcal{S} = \Phi(D)$, luego la definición de suavidad de $\mathcal{S}$ depende de que exista al menos una parametrización suave para $\mathcal{S}$. Por lo tanto, a mi juicio, no se debe hablar de *Superficie suave en un punto*, sino de *parametrización suave en el mismo.* (Ver ejercicio 15, página 4 de Marsden & Tromba. Tercera edición.)

Nota: En el texto, Calculus Vol II de Tom M. Apostol se da como definición de punto singular de $\mathcal{S}$, a un punto $\Phi(u_0, v_0)$ tal que $(T_u \times T_v)_{\Phi(u_0,v_0)} = (0,0,0)$ o en el cual T_u o T_v sean discontinuas. Nosotros adoptaremos la dada arriba (Cálculo Vectorial- Marsden y Tromba).

(e) *Definición. Plano tangente.* Sea $\mathcal{S} = \Phi(D)$ con $\mathcal{S}$ suave en $\Phi(u_0, v_0)$ (o sea (PVF)$(u_0, v_0) \neq (0,0,0)$), se define el plano tangente a $\mathcal{S}$ en $\Phi(u_0, v_0)$ como el plano determinado por T_u y T_v en dicho punto y tiene por ecuación: $(\mathrm{PVF})(u_0, v_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$ o sea:

$$(T_u \times T_v)_{\Phi(u_0,v_0)} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Algunos autores prefieren la notación de producto escalar siguiente:

$$< (T_u \times T_v)_{\Phi(u_0,v_0)}, (x - x_0, y - y_0, z - z_0) >= 0$$

Es preciso aclarar que (x_0, y_0, z_0) es el punto $\Phi(u_0, v_0) \in \mathcal{S}$ tal que $\Phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

Observemos que si $\mathcal{S}$ es suave en $\Phi(u_0, v_0)$, $\ (PVF)(u_0, v_0) \neq (0,0,0) \Rightarrow$ existe plano tangente a $\mathcal{S}$ en $\Phi(u_0, v_0)$.

Distintas expresiones para el PVF y, por lo tanto, para el plano tangente.

(i) En MA-2112 se estudió la gráfica de una superficie $\mathcal{S}$ (ver fig 1.1) dada por su ecuación en forma explícita:
$z = f(x, y)$, es decir: Si $f : \begin{cases} A \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & f(x,y) \end{cases}$,
$\mathcal{S} = \mathrm{graf} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|z = f(x, y), \ \text{para por lo menos algun } (x, y) \in A \ \}$,
con $A = \mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S}$.

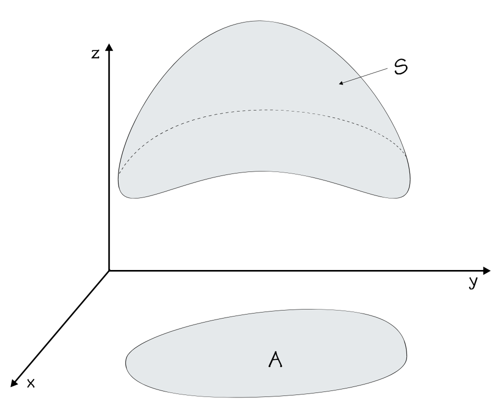


Figura 1.1: Observar que $A = \mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S}$

Suponiendo que f es diferenciable o $\mathcal{C}^1(A)$, con $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x \\ y & = & y \\ z & = & f(x,y) \end{array}\right. \Rightarrow \Phi(x,y)=(x,y,f(x,y))$

$T_x \times T_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial x}{\partial y} & \dfrac{\partial y}{\partial y} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = -\dfrac{\partial z}{\partial x}\,\vec{i} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\,\vec{j} + \vec{k} \neq (0,0,0)$ y la ecuación del plano tangente a $\mathcal{S}$ en $\Phi(x_0,y_0)=(x_0,y_0,z_0)=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ será $(PVF)(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0 \Rightarrow$

$$-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}(x-x_0) - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}(y-y_0) + z - z_0 = 0 \Rightarrow$$

$$z = f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}(y-y_0).$$

(ii) De forma análoga, si $\mathcal{S}$ está dada por una ecuación en forma explícita: $y=g(x,z)$, se pone $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x \\ y & = & g(x,z) \\ z & = & z \end{array}\right.$, $\Phi(x,z)=(x,g(x,z),z)$ con g diferenciable o $\mathcal{C}^1(B)$, $B=\mathrm{Proy}_{xz}\mathcal{S}$ para obtener: $T_x \times T_z = \dfrac{\partial y}{\partial x}\,\vec{i} - \vec{j} + \dfrac{\partial y}{\partial z}\,\vec{k}$,

$$y = g(x_0,z_0) + \left(\frac{\partial g(x,z)}{\partial x}\right)_{(x_0,z_0)}(x-x_0) + \left(\frac{\partial g(x,z)}{\partial z}\right)_{(x_0,z_0)}(z-z_0).$$

(iii) Si $\mathcal{S}$ está dada por $x=h(y,z)$, h diferenciable o $\mathcal{C}^1(C)$, $C=\mathrm{Proy}_{yz}\ \mathcal{S}$, se pone

$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & h(y,z) \\ y & = & y \\ z & = & z \end{array}\right.$, $\Phi(y,z)=(h(y,z),y,z)$ y se obtendrá $T_y \times T_z = \vec{i} - \dfrac{\partial h}{\partial y}\,\vec{j} - \dfrac{\partial h}{\partial z}\,\vec{k}$,

$$x = h(y_0,z_0) + \left(\frac{\partial h(y,z)}{\partial y}\right)_{(y_0,z_0)}(y-y_0) + \left(\frac{\partial h(y,z)}{\partial z}\right)_{(y_0,z_0)}(z-z_0).$$

(iv) Suponer que $\mathcal{S}$ viene dada por una ecuación en forma implícita de la forma $F(x,y,z)=0$, por ejemplo en el caso en que ésta defina a z como función implícita y diferenciable respecto de x e y.
En este caso, se vio en MA-2112 que aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}}{\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}}$, luego, como en este ejemplo se supone $z=f(x,y)$, recurrimos ahora al caso (i), en el cual $\mathcal{S}$ se parametriza por $\Phi(x,y)=(x,y,f(x,y))$ y $T_x \times T_y = \left(-\dfrac{\partial z}{\partial x}, -\dfrac{\partial z}{\partial y}, 1\right)$. Por lo tanto, $T_x \times T_y = \left(\dfrac{\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}}\ ,\ \dfrac{\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}}{\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}}\ ,\ 1\right)$ y la ecuación del plano tangente a $\mathcal{S}$ en $\Phi(x_0,y_0)$ será por (i): $(PVF)_{(x_0,y_0)}\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$

$$\Rightarrow \left[\frac{\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}}\right]_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \left[\frac{\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}}{\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}}\right]_{(x_0,y_0)}(y-y_0) + (z-z_0) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\right]_{(x_0,y_0)}(x-x_0)+\left[\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\right]_{(x_0,y_0)}(y-y_0)+\left[\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\right]_{(x_0,y_0)}(z-z_0)=0$$

Nota Importante: El alumno no debe tratar de memorizar las fórmulas, sino de prepararse para saber deducirlas. En este caso, por ejemplo, la situación podría ser: Hallar la forma del PVF y del plano tangente a una superficie $\mathcal{S}$, dada por la ecuación $G(x,y,z)=0$, suponiendo que ésta última define a x por ejemplo, en función de y y de z, para el punto $(x_0,y_0,z_0)\in\mathcal{S}$.

(v) Caso en que $\mathcal{S}$ es una superficie plana, contenida en un plano que es paralelo al plano xy (por ejemplo, ver fig 1.2). Aquí, $z=f(x,y)=h=$ altura del plano dado sobre el xy, y estamos en el caso (i):

$$T_x\times T_y=\left(-\frac{\partial z}{\partial x},-\frac{\partial z}{\partial y},1\right)=(0,0,1)=\vec{k}.$$

Y la ecuación del plano tangente a $\mathcal{S}$ en (x_0,y_0,z_0) es $PVF_{(x_0,y_0)}\cdot(x-x_0,y-y_0,z-h)=0\Leftrightarrow z-h=0\Leftrightarrow z=h,$

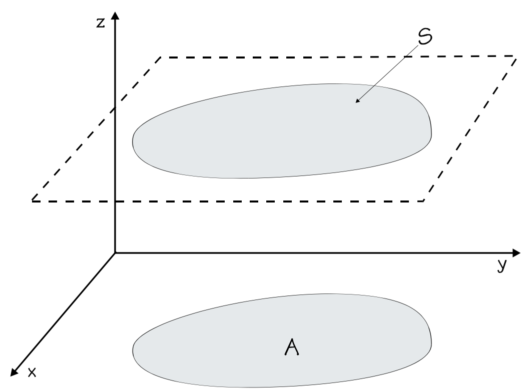


Figura 1.2:

es decir, el plano tangente a $\mathcal{S}$ en cualquier punto de $\mathcal{S}$ es el propio plano que contiene a $\mathcal{S}$.

(vi) Caso en que $\mathcal{S}$ es una superficie plana, contenida en un plano P, el cual forma un ángulo $\gamma\neq\pi/2$, por ejemplo con el plano xy (ver fig 1.3). Aquí se define el ángulo γ como el que forman el vector unitario $\vec{k}$ y $T_x\times T_y$. (Si $\mathcal{S}$ es plana contenida en plano Q, con ángulo $\beta\neq\pi/2$ con plano zx, por ejemplo, se define β como el que forman el vector unitario $\vec{j}$ con $T_z\times T_x$, etc.)

Y como aquí también es $z=f(x,y)$, estamos de nuevo en el caso (i) y $(PVF)=\left(-\frac{\partial z}{\partial x},-\frac{\partial z}{\partial y},1\right)$ siendo la ecua-

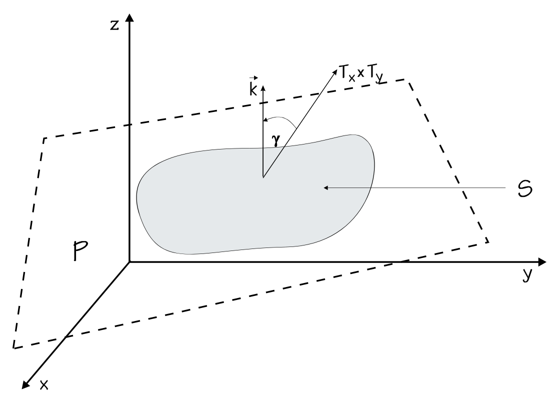


Figura 1.3:

ción del plano tangente a $\mathcal{S}$ en (x_0, y_0, z_0) :

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}(x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}(y - y_0).$$

Pero, es interesante observar que, en este caso, $\vec{k} \cdot (PVF) = 1$ (Resultado que aprovecharemos más adelante para calcular el área de $\mathcal{S}$. Si el plano P forma un ángulo $\beta \neq \pi/2$ con plano zx, entonces será $y = g(x, z), \quad PVF = (g_x, -1, g_y)$, etc.)

(f)*Definición. Area de una Superficie Parametrizada.* Sea $\mathcal{S}$ una superficie *suave a trozos* que sea unión de imágenes de superficies parametrizadas $\mathcal{S}_i$, con $\Phi_i : D_i \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con las condiciones siguientes:
(i) Cada D_i es una *región elemental* en $\mathbb{R}^2$ (Vistas en MA-2112).
(ii) Cada D_i es de clase $\mathcal{C}^1(D_i)$ y además uno a uno (una función Φ es uno a uno en D si para cada dos puntos, (u_1, v_1) y (u_2, v_2) en D, $\Phi(u_1, v_1) = \Phi(u_2, v_2) \Rightarrow u_1 = u_2$ y $v_1 = v_2$; esto quiere decir, que dos puntos distintos no dan imágenes iguales), excepto, si es el caso en δD_i,
(iii) $\mathcal{S}_i = \Phi(D_i)$ es suave, excepto, puede ser en un número finito de puntos.
Se define entonces, el área de una superficie parametrizada $\mathcal{S}_i$ por $A(\mathcal{S}_i) = \iint_{D_i} \|PVF\| = \iint_{D_i} \|T_u \times T_v\|$ Obsérvese que no se deben poner los diferenciales du y dv a priori, como explicamos en MA-2112, hay que esperar a conocer si $D_i^* = \Phi_i^{-1}(\mathcal{S}_i)$ es de tipo I ó II ó III. En general, como mencionamos al comienzo de esta definición, si $\mathcal{S} = \cup \mathcal{S}_i$, entonces $A(\mathcal{S}) = \sum A(\mathcal{S}_i)$.

Ahora, como en el caso del (PVF), habrá diferentes expresiones para las fórmulas de $A(\mathcal{S})$ según la forma que se tenga de $\|PVF\|$:

Caso (a): $\mathcal{S} = \varphi(D), D \subset \mathbb{R}^2, \Phi : D \to \mathbb{R}^3, \Rightarrow A(\mathcal{S}) = \displaystyle\iint_{D=\Phi^{-1}(\mathcal{S})} \|T_u \times T_v\|.$

Caso (b): $\mathcal{S}$ dada por $\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, aquí sabemos que (PVF) = $\left(-\dfrac{\partial z}{\partial x},\ -\dfrac{\partial z}{\partial y},\ 1\right)$,

$$\|PVF\| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \Rightarrow A(\mathcal{S}) = \iint_{D=\text{Proy}_{xy}\mathcal{S}} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}.$$

Si $\mathcal{S}$ dada por $\Phi(x, z) = (x, g(x, z), z), \quad (PVF) = \left(\dfrac{\partial g}{\partial x},\ -1,\ \dfrac{\partial g}{\partial z}\right)$ y

$A(\mathcal{S}) = \displaystyle\iint_{D=\text{Proy}_{xz}\mathcal{S}} \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2 + 1},$ finalmente, si $\mathcal{S}$ está dada por: $\Phi(y, z) = (h(y, z), y, z)$,

$(PVF) = \left(1, -\dfrac{\partial h}{\partial y},\ -\dfrac{\partial h}{\partial z}\right)$ y $A(\mathcal{S}) = \displaystyle\iint_{D=\text{Proy}_{yz}\mathcal{S}} \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2 + 1},$

Caso (c): $\mathcal{S}$ dada por $F(x, y, z) = 0$ con z función implícita y diferenciable respecto de x e y:

$$(PVF) = \left(\frac{\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}},\ \frac{\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}}{\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}},\ 1\right) \text{ y}$$

$$A(\mathcal{S}) = \iint_{D=\text{Proy}_{xy}\mathcal{S}} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\right)^2}}{\left|\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\right|}$$

Aquí el alumno debe capacitarse para deducir las fórmulas en los casos, $F(x, y, z) = 0,\ x = g(y, z)$ o en el $y = h(x, z)$.

Caso (d): $\mathcal{S}$ plana contenida en plano P paralelo al xy o al xz o al yz respectivamente, el alumno debe deducir entonces, según lo visto anteriormente, que: $A(\mathcal{S}) = A(D)$ con $D = \mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S}$ o $D = \mathrm{Proy}_{xz}\mathcal{S}$ o $D = \mathrm{Proy}_{yz}\mathcal{S}$ según sea el caso.

Caso (e): $\mathcal{S}$ plana contenida en plano P, el cual forma ángulo $\gamma \neq \pi/2$ con el plano xy o el xz o el yz respectivamente. Para el caso γ con el plano xy, vimos que $\vec{k} \cdot (PVF) = 1 = \|\vec{k}\| \, \|PVF\| \cos\gamma = 1 \cdot \|(PVF)\| \cos\gamma \Rightarrow \|(PVF)\| = 1/\cos\gamma$.

Para el caso γ con el plano xz, será: $\vec{j} \cdot (PVF) = 1 \Rightarrow \|(PVF)\| = 1/\cos\gamma$.

Para el caso γ con el plano yz, será: $\vec{i} \cdot (PVF) = 1 \Rightarrow \|(PVF)\| = 1/\cos\gamma$.

Por lo tanto se tendrá, respectivamente, según el caso: $A(\mathcal{S}) = \dfrac{1}{\cos\gamma} \displaystyle\iint_D 1 = \dfrac{1}{\cos\gamma} A(D)$, siendo $D = \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S} & \mathrm{o} \\ \mathrm{Proy}_{xz}\mathcal{S} & \mathrm{o} \\ \mathrm{Proy}_{yz}\mathcal{S} & \end{array} \right.$

Superficie Esférica.
Vamos a estudiar aquí una superficie muy común e interesante, la superficie esférica.
(i) Parametrización de la superficie de la esfera de ecuación cartesiana $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, según *Coordenadas Generales* $x = a(\cos u) \operatorname{sen} v, \; y = a(\operatorname{sen} u) \operatorname{sen} v, \; z = a \cos v, \quad u \in [0, 2\pi], \; v \in [0, \pi]$, ver fig 1.4. (En MA-2112, $u = \theta, v = \varphi$).
Obsérvese que v toma el valor de 0 en la parte positiva del eje z y aumenta hacia la parte negativa del eje z. De

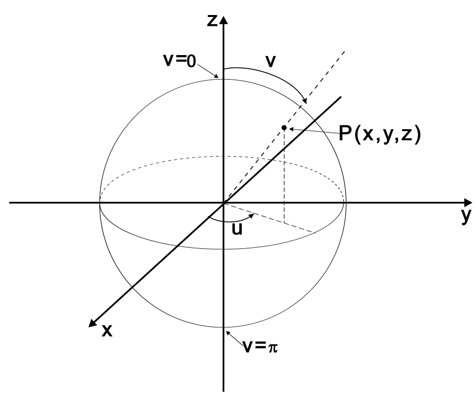


Figura 1.4:

manera que si P es un punto de la esfera, con coordenadas cartesianas (x, y, z), sus coordenadas en la *Parametrización General* serán: $x = a(\cos u) \operatorname{sen} v, \;\; y = a(\operatorname{sen} u) \operatorname{sen} v, \;\; z = a \cos v$.

(ii) Parametrización geográfica de la esfera dada por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \;\; x = a(\cos u)(\cos v); \; y = a(\operatorname{sen} u)(\cos v); \; z = a \operatorname{sen} v, \quad u \in [0, 2\pi], v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (ver fig 1.5), pero aquí v comienza en la parte negativa del eje z $\; (v = -\frac{\pi}{2})$ aumenta hacia el plano xy $\; (v = 0)$, sigue aumentando hasta que lleguemos a la parte positiva del eje z $\; (v = \frac{\pi}{2})$.
Las curvas de ecuación $u =$constante son los *meridianos*; las de ecuación $v =$constante son los *paralelos.* Es decir, u mide el *ángulo de longitud* en sentido contrario a las agujas del reloj, mientras v mide el *ángulo de latitud.*

Es un ejercicio para el alumno, comprobar que tanto en (i) como en (ii) se cumple: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
De modo que en (i) se tiene la parametrización de la esfera:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \rightarrow & \Phi(u, v) = a((\cos u) \operatorname{sen} v, (\operatorname{sen} u) \operatorname{sen} v, \cos v) \end{array} \right.$$

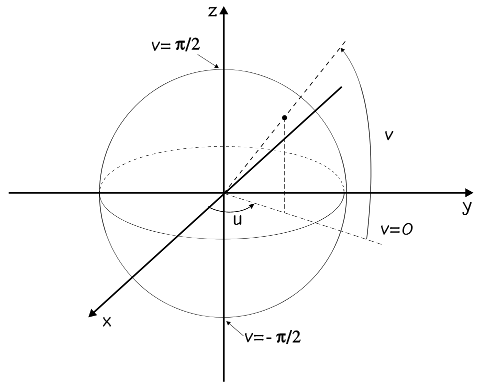


Figura 1.5:

mientras que en (ii):

$$\begin{cases} \Phi : [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \rightarrow \quad \Phi(u, v) = a((\cos u)\cos v, (\operatorname{sen} u)\cos v,\ \operatorname{sen} v) \end{cases}$$

1.2 Ejercicios resueltos

Problema 1
(a) ¿ Es diferenciable la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, con "Parametrización General" $\Phi(u, v) = a((\cos u)\operatorname{sen} v, (\operatorname{sen} u)\operatorname{sen} v, \cos v)$?
(b) ¿ Es suave la superficie descrita en (a) ?
(c) ¿ Es uno a uno la paramtrización Φ ?

Solución
(a) La parametrización es diferenciable en su dominio $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ puesto que las funciones componentes de Φ son diferenciables como funciones de u y de v (por ser funciones trigonométricas o producto de ellas).

(b) Observar que:

$$(PVF) = T_u \times T_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a(\operatorname{sen} u)\operatorname{sen} v & a(\cos u)\operatorname{sen} v & 0 \\ a(\cos u)\cos v & a(\operatorname{sen} u)\cos v & -a\operatorname{sen} v \end{vmatrix}$$

$$= -[a^2(\cos u)\operatorname{sen}^2 v]\vec{i} - [a^2(\operatorname{sen} u)\operatorname{sen}^2 v]\vec{j} - a^2[(\operatorname{sen}^2 u)(\operatorname{sen} v)\cos v + (\cos^2 u)(\operatorname{sen} v)\cos v]\vec{k}$$
$$= -a^2(\operatorname{sen} v)[(\cos u)(\operatorname{sen} v)\vec{i} + (\operatorname{sen} u)(\operatorname{sen} v)\vec{j} + (\cos v)\vec{k}]$$

La superficie no es suave en los puntos $(0, 0, a);\ (0, 0, -a)$ puesto que en ellos, $\operatorname{sen} 0 = 0$ y $\operatorname{sen}\pi = 0$ respectivamente. Por lo tanto, en esos dos puntos $T_u \times T_v = (0, 0, 0)$. Luego, la superficie dada *no es suave* (Por no ser suave en algún punto, en este caso en $(0, 0, a)$ y en $(0, 0, -a)$).

(c) Φ no es uno a uno, puesto que, por ejemplo: $\Phi(0, \pi) = a((\cos 0)\operatorname{sen}\pi, (\operatorname{sen} 0)\operatorname{sen}\pi, \cos\pi) = (0, 0, -1)$ y $\Phi(2\pi, \pi) = a((\cos 2\pi)\operatorname{sen}\pi, (\operatorname{sen} 2\pi)\operatorname{sen}\pi, \cos\pi) = (0, 0, -1)$ (puntos distintos con la misma imagen).

Problema 2
Dada la ecuación $x^2+y^2+z^2=a^2$, de una superficie esférica con parametrización geográfica Φ
(a) Demuestre que Φ es diferenciable.
(b) Demuestre que Φ no es suave,
(c) Demuestre que Φ no es uno a uno,

Solución
Se deja al alumno como ejercicio, recordando que, en este caso:
$\Phi(u,v)=(a(\cos u)\cos v, a(\operatorname{sen} u)\cos v, a\operatorname{sen} v)$ y $u\in[0,2\pi],\ v\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.
Demuestre que $T_u\times T_v=a^2(\cos v)((\cos u)\cos v, (\operatorname{sen} u)\operatorname{sen} v, \operatorname{sen} v)$.

Problema 3
Sea φ_0 fijo $\in(0,\pi/2)$. Consideremos la parametrización:

$$\begin{cases} \Phi:[0,2\pi]\times[0,h]\subset\mathbb{R}^2 & \to \quad \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \to \quad \Phi(u,v)=(v(\operatorname{sen}\varphi)\cos u, v(\operatorname{sen}\varphi)\operatorname{sen} u, v\cos\varphi) \end{cases}.$$

(a) Demuestre que en los puntos interiores del rectángulo $[0,2\pi]\times[0,h],\ \ (PVF)\neq(0,0,0)$, es decir, todos los puntos interiores de ese rectángulo son puntos regulares.
(b) Demuestre que la imagen de Φ sobre el rectángulo dado es un cono de semi-ángulo cónico φ, con ecuación cartesiana: $x^2+y^2=(\tan^2\varphi)z^2$ (Cono con vértice en $(0,0,0)$ y eje el de la z).
(c) Hallar los puntos singulares de la superficie definida por Φ.

Solución
(a) $T_u\times T_v=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v(\operatorname{sen}\varphi)\operatorname{sen} u & v(\operatorname{sen}\varphi)\cos u & 0 \\ (\operatorname{sen}\varphi)\cos u & (\operatorname{sen}\varphi)\operatorname{sen} u & \cos\varphi \end{vmatrix}$

$=v(\operatorname{sen}\varphi)(\cos u)(\cos\varphi)\vec{i}+v(\operatorname{sen}\varphi)(\operatorname{sen} u)(\cos\varphi)\vec{j}-(v\operatorname{sen}^2\varphi)\vec{k}$.

Ahora, $\varphi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ y allí $\operatorname{sen}\varphi$ y $\cos\varphi$ son siempre $>0,\ v$ para el interior del rectángulo varía en $[0,h]$ y u en $(0,2\pi)$.
En la primera componente de $T_u\times T_v$ aparece $\cos u$, en la segunda aparece $\operatorname{sen} u$ y en la tercera, $\operatorname{sen}^2 u$ y $\cos^2 u$.
Pero, no hay punto alguno en el interior del rectángulo en donde se anulen simultáneamente $\operatorname{sen} u$ y $\cos u$.
Por lo tanto, $T_u\times T_v\neq(0,0,0)\ \forall\ P\in$ interior del rectángulo.

(b) Sea $\Phi(u,v)=(x,y,z)$, luego $x^2+y^2=v^2\operatorname{sen}^2\varphi$ y $z^2=v^2\cos^2\varphi>0$ ya que $v\in[0,h],\varphi\in(0,\pi/2)$.
Así que $x^2+y^2=v^2\operatorname{sen}^2\varphi=v^2\dfrac{\operatorname{sen}^2\varphi}{\cos^2\varphi}\cos^2\varphi=(v^2\cos^2\varphi)\tan^2\varphi$. Por lo tanto, $x^2+y^2=z^2\tan^2\varphi$ y en MA-2112 vimos que esa es la ecuación cartesiana de un cono de vértice en el origen, eje z y semi-ángulo cónico φ (ver fig 1.6).
φ fijo $\in(0,\pi/2)$, por ejemplo, si: $\varphi=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow x^2+y^2=z^2,\qquad \varphi=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow x^2+y^2=3z^2,\qquad \varphi=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow x^2+y^2=\dfrac{1}{3}z^2$, etc.

(Ahora bien, así como está planteado el ejercicio, con $\Phi(u,v)=(v(\operatorname{sen}\varphi)\cos u, v(\operatorname{sen}\varphi)\operatorname{sen} u, v\cos u)$ con $v\in[0,h],\ \ u\in[0,2\pi]$ y φ fijo $\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, estamos trabajando sólo con una porción de superficie cónica. Si hacemos variar φ entre 0 y $\dfrac{\pi}{2}$ y entre $-\dfrac{\pi}{2}$ y 0, tendremos una superficie cónica de ecuación $x^2+y^2=(\tan^2\varphi)z^2$ con $z=\pm v\cos\varphi,$ y $\varphi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$. Recuérdese que φ se mide desde el eje z. Ver fig 1.7).

(c) Los puntos singulares de la superficie $\mathcal{S}$ son los correspondientes a $\Phi(u,0)$; puesto que allí $(T_u\times T_v)(u,0)=[v(\operatorname{sen}\varphi)(\cos\varphi)(\cos u), v(\operatorname{sen}\varphi)(\cos\varphi)(\operatorname{sen} u), -v\operatorname{sen}^2\varphi]_{(u,0)}=(0,0,0)$ cualquiera que sea el u.
(Obsérvese que Φ no es uno a uno, ya que $\Phi(0,v)=\Phi(2\pi,v)$).

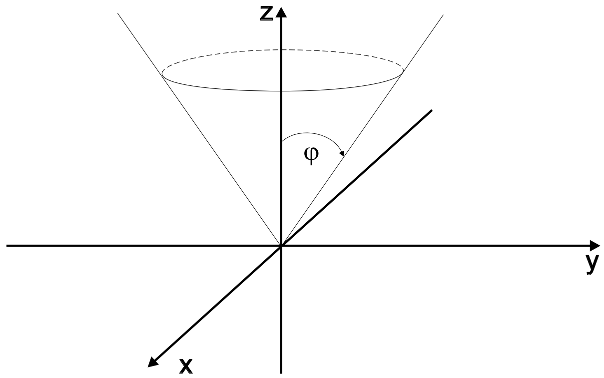


Figura 1.6:

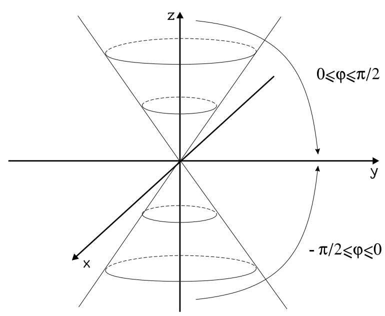


Figura 1.7:

Nota didáctica: en este ejercicio hemos estudiado la parametrización de una superficie cónica, de vértice en el origen y semi-ángulo cónico φ.
$\Phi(u,v) = v((\operatorname{sen}\varphi)\cos u, (\operatorname{sen}\varphi)\operatorname{sen} u, \cos\varphi), \quad u \in [0,2\pi], v \in [0,\pi]$ con ecuación cartesiana $x^2 + y^2 = (\tan^2\varphi)z^2$.
Sin embargo, la parametrización de una superficie no es única por ejemplo, para el caso $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ tendríamos $x^2 + y^2 = z^2$ con $\Phi(u,v) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}v(\cos u, \operatorname{sen} u, 1)$.
Pero, también podríamos parametrizarlo con $\Phi(u,v) = u(\cos v, \operatorname{sen} v, 1), \quad u > 0$.
Aquí también es $x^2 + y^2 = u^2\cos^2 v + u^2\operatorname{sen}^2 v = u^2 = z^2$.

También queremos resaltar, en el caso particular de la superficie cónica dada en el ejercicio 3, con φ fijo $\in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $(u,v) \in [0,2\pi] \times [0,h]$, la transformación del rectángulo $[0,2\pi] \times [0,h]$ en la porción de superficie cónica: (ver fig 1.8)
Aquí se observa claramente que $\Phi(0,v) = \Phi(2\pi,v) \Rightarrow \Phi$ no es uno a uno.

Problema 4
Una parametrización del paraboloide elíptico podría ser $\Phi(u,v) = (au\cos v, bu\operatorname{sen} v, u^2), \quad (u,v) \in [0,\infty) \times [0,2\pi]$.
(a) Hallar la ecuación cartesiana.
(b) Hallar $T_u \times T_v$.
(c) Demuestre que $(T_u \times T_v)(0,v) = (0,0,0)$.
(d) Hallar la ecuación del plano tangente a $\mathcal{S}$ en $(-a\pi, 0, \pi^2)$.

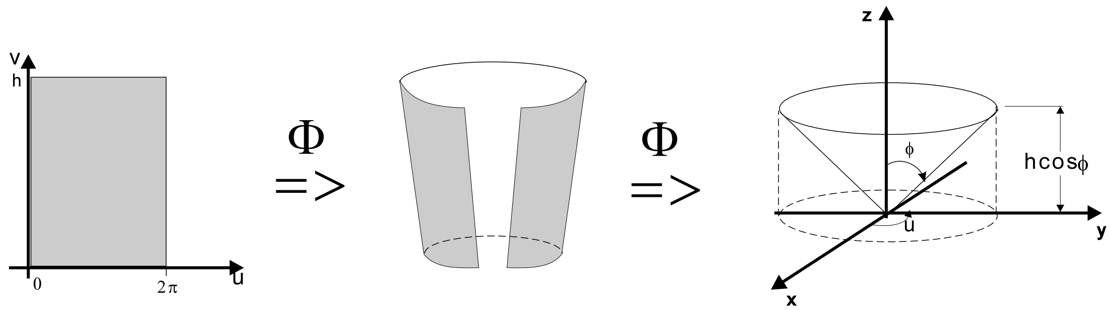


Figura 1.8:

Solución
(a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z.$

(b) $T_u \times T_v = (-2u^2 b \cos v, 2u^2 a \operatorname{sen} v, abu).$

(c) Basta con evaluar para demostrar que $(T_u \times T_v)(0, v) = (0,0,0).$

(d) Tenemos que hallar el punto (u_0, v_0) correspondiente al $(-a\pi, 0, \pi^2).$

Por lo tanto, $\Phi(u_0, v_0) = (au_0 \cos v_0, bu_0 \operatorname{sen} v_0, u_0^2) \equiv (-a\pi, 0, \pi^2) \Leftrightarrow au_0 \cos v_0 = -a\pi, \;\; bu_0 \operatorname{sen} v_0 = 0, \;\; u_o^2 = \pi^2$. Por lo tanto, $u_0 = \pi, \; v_0 = \pi.$
Así que $(T_u \times T_v)_{(\pi,\pi)} = (2\pi^2 b, 0, ab\pi)$
$(T_u \times T_v)_{(\pi,\pi)} \cdot (x + a\pi, y, z - \pi^2) = 0 \Leftrightarrow 2\pi^2 b(x + a\pi) + ab\pi(z - \pi^2) = 0 \Leftrightarrow 2\pi x + az + a\pi^2 = 0.$

Problema 5
Compruebe que $\Phi(u, v) = (av \cos u, bv \operatorname{sen} u, v^2)$ con $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \infty)$, define también un paraboloide elíptico de ecuación cartesiana $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z.$

Solución
Queda como ejercicio para el alumno.

Problema 6
Hallar el área del subconjunto del plano de ecuación $x + y = z$ dentro del cilindro dado por $x^2 + y^2 - 2x = 0.$

Solución
$x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$ superficie cilíndrica $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 & = & 1 \\ z & = & z \end{cases}$ y al cortar por el plano de ecuación $x + y = z$, este plano pasa por el eje de coordenadas y por el punto de la superficie cilíndrica $(2, 0, 2)$ (ver fig 1.9). Ahora, por ser $\mathcal{S} \subset$ Plano dado, el cual forma un ángulo $\gamma \neq \pi/2$ con el plano xy recurrimos al estudio hecho al referirnos al caso correspondiente.

Por lo tanto, $A(\mathcal{S}) = \dfrac{1}{\cos\gamma} \displaystyle\iint_D 1 = \dfrac{1}{\cos\gamma} A(D), \qquad A(D) = \pi \times 1^2 = \pi$ y $\cos\gamma = 1/\|PVF\|.$
Pero, $(PVF) = (-z_x, -z_y, 1)$ con $z = x+y \Rightarrow (PVF) = (-1,-1,1) \Rightarrow \|PVF\| = \sqrt{3}, \;\Rightarrow \dfrac{1}{\cos\gamma} = \sqrt{3} \Rightarrow A(\mathcal{S}) = \sqrt{3}\pi.$

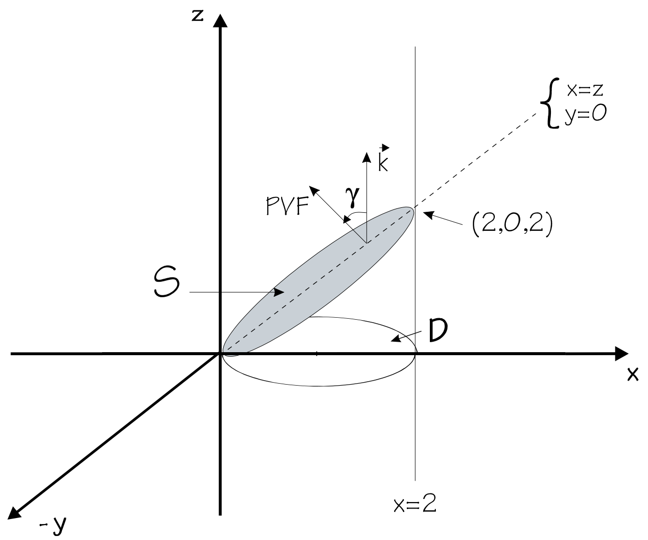


Figura 1.9:

Problema 7
(a) Parametrizar la porción de hiperboloide dada por $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, entre los planos de ecuaciones $z = 0$ y $z = k,\ \ k > 0$ respectivamente, de tres formas diferentes.
(b) Hallar también en cada caso, $\|PVF\|$.

Solución
(a)$z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2, \quad y = 0 \Rightarrow x^2 - z^2 = a^2, \quad x = 0 \Rightarrow y^2 - z^2 = a^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{a^2 + z^2}$.

Construir $\Phi_1(\theta, z) = (y\cos\theta, y\,\mathrm{sen}\,\theta, z) = (\sqrt{a^2 + z^2}\cos\theta, \sqrt{a^2 + z^2}\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$ con $\theta \in [0, 2\pi],\ z \in [0, k]$

Es fácil comprobar que $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ es satisfecha por Φ_1. (Ve fig 1.10)
Otra parametrización puede ser con $y = 0, \quad x^2 - z^2 = a^2, \quad x = \pm\sqrt{a^2 + z^2}$,

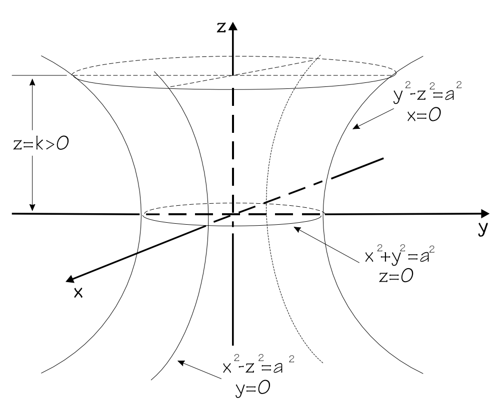


Figura 1.10:

$\Phi_2(\theta, z) = (x\cos\theta, x\,\mathrm{sen}\,\theta, z) = (\sqrt{a^2 + z^2}\cos\theta, \sqrt{a^2 + z^2}\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$.

Compruebe que $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ también es satisfecha por Φ_2.

Finalmente, con $z = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = g(x, y), \quad \Phi_3(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2 - a^2})$; compruebe que las componentes de Φ_3 satisfacen la ecuación del hiperboloide.

(b) Para $\Phi_1(\theta, z)$ compruebe que $(T_\theta \times T_z)_1 = (\sqrt{a^2+z^2}\cos\theta, \sqrt{a^2+z^2}\operatorname{sen}\theta, -z)$.
Para $\Phi_2(\theta, z)$ compruebe que $(T_\theta \times T_z)_2 = (\sqrt{a^2+z^2}\cos\theta, \sqrt{a^2+z^2}\operatorname{sen}\theta, -z)$.
Para $\Phi_3(x, y)$ compruebe que $(T_x \times T_y) = (-z_x, -z_y, 1) = \left(-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}, -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}, 1\right)$.

Así que

$$\|(T_\theta \times T_z)_1\| = \sqrt{a^2+2z^2}, \quad \|(T_\theta \times T_z)_2\| = \sqrt{a^2+2z^2}, \ \ \|(T_x \times T_y)\| = \sqrt{\frac{x^2+y^2+x^2+y^2-a^2}{x^2+y^2-a^2}} = \sqrt{\frac{2(x^2+y^2)-a^2}{x^2+y^2-a^2}}.$$

Observación: Las parametrizaciones Φ_1 y Φ_2 definen al parabuloide si $z = k > 0$ o $z = k < 0$, la Φ_3 no.

Problema 8
Demostrar que el área de la porción de hiperboloide del ejercicio anterior viene dada por
$\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^k \sqrt{a^2+2z^2}\ \ dz d\theta.$
(No calcular la integral).

Solución
Utilizando $\Phi_1(\theta, z)$, por ejemplo, vimos que

$\|(T_\theta \times T_z)_1\| = \sqrt{a^2+2z^2} \Rightarrow A(\mathcal{S}) = \displaystyle\iint_{D=\Phi^{-1}(\mathcal{S})} \sqrt{a^2+2z^2} = \int_0^{2\pi}\int_0^k \sqrt{a^2+2z^2} dz d\theta$, ya que D viene a ser el rectángulo dado en la figura 1.11.

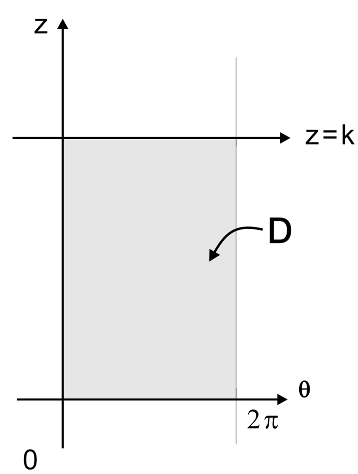


Figura 1.11:

Problema 9
(a) Parametrizar la superficie $\mathcal{S}$ descrita como la porción de superficie cilíndrica dada por $x^2 + y^2 = 1$ interior a la esfera dada por $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4, \ \ z \geq 0$,
(b) Hallar el área de $\mathcal{S}$,

(c) Hallar la ecuación del plano tangente a $\mathcal{S}$ en el punto $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

Solución
Se giran los ejes x y y para visualizar mejor la figura (fig. 1.12)
(a) $\Phi(\theta, z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$ parametriza a toda la superficie cilíndrica dada, ya que $x^2 + y^2 = 1$ y z está indefinida,

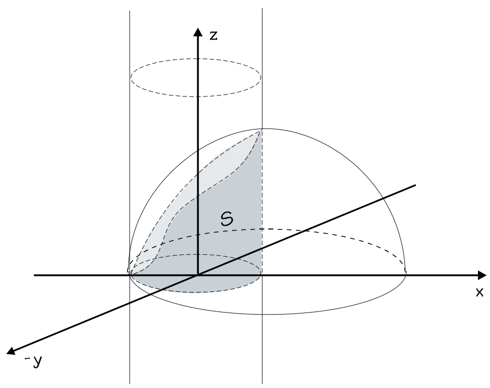


Figura 1.12:

tenemos entonces que limitar los valores de z para que Φ parametrice a la superficie en cuestión.
Para ello, despejamos z de la ecuación de la esfera: $z^2 = 4 - (x-1)^2 - y^2 = 4 - (\cos\theta - 1)^2 - \operatorname{sen}^2\theta = 2(1 + \cos\theta)$
y como $z \geq 0 \Rightarrow 0 \leq z \leq \sqrt{2(1+\cos\theta)}, \;\; \theta \in [-\pi, \pi]$.

(b) Se calcula $T_\theta \times T_z = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0), \; \|T_\theta \times T_z\| = 1. \;\; A(\mathcal{S}) = \displaystyle\iint_{D=\Phi^{-1}(\mathcal{S})} \|T_\theta \times T_z\| = \iint_D 1 = A(D).$

Ahora, D la contraimagen (o imagen inversa) por Φ de $\mathcal{S}$ se muestra en la fig. 1.13: $\begin{cases} \theta = -\pi & \Rightarrow \quad z = 0 \\ \theta = \pi & \Rightarrow \quad z = 0 \\ \theta = 0 & \Rightarrow \quad z = 2 \end{cases}$ y z es

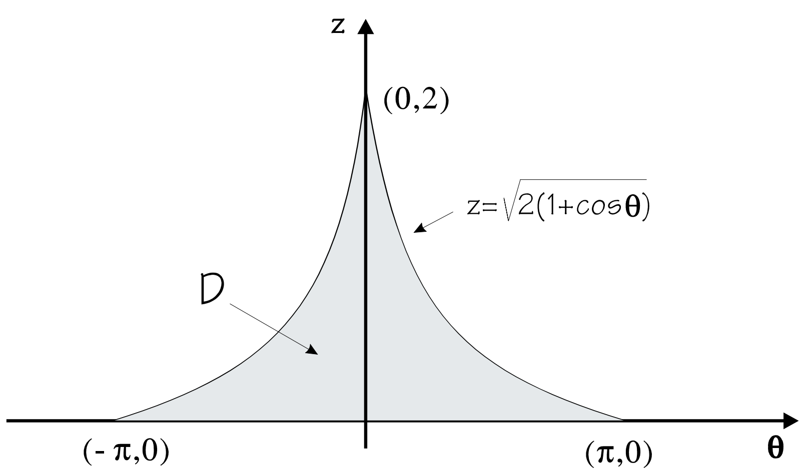


Figura 1.13:

función continua de 0.
Por lo tanto,

$$A(\mathcal{S}) = A(D) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\sqrt{2(1+\cos\theta)}} dzd\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{2(1+cos\theta)}d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\ d\theta = 2\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\ d\theta =$$
$$2\times\underbrace{2\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\ d\theta}_{\text{ver figura}} = 4\times 2\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)_0^{\pi} = 8.$$

Nota: También vale la misma parametrización con $\theta\in[0,2\pi],\ \ 0\le z\le\sqrt{2(1+\cos\theta)}$. (Ver fig 1.14).

(c) Ahora, la ecuación del plano tangente a $\mathcal{S}$ en $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ es

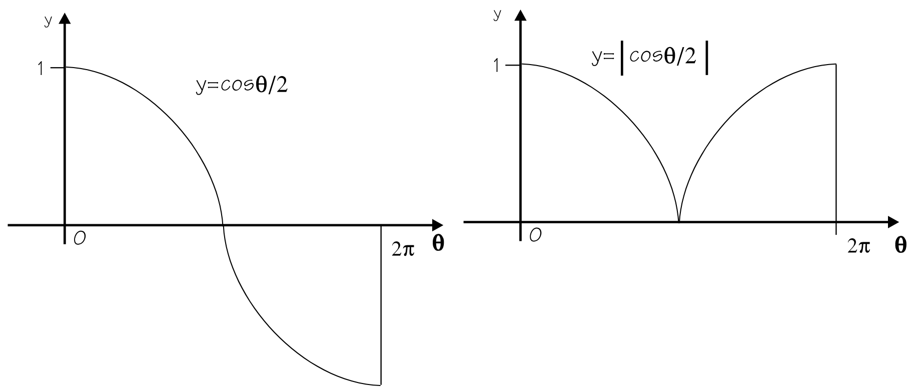


Figura 1.14:

$$(PVF)_{(\theta_0,z_0)}\cdot\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2},y-\frac{\sqrt{2}}{2},z-0\right)=0.$$

Así que, $\Phi(\theta_0,z_0)=(\cos\theta_0,sen\theta_0,z_0)\equiv\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\Leftrightarrow\cos\theta_0=\operatorname{sen}\theta_0=\frac{\sqrt{2}}{2},\ z_0=0\Leftrightarrow\theta_0=\frac{\pi}{4},z_0=0.$

Por lo tanto,

$$(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta,0)_{(\frac{\pi}{4},0)}\cdot\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2},y-\frac{\sqrt{2}}{2},z\right)=0\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{lcl}\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-2&=&0\\ z&=&z\end{array}\right\}$$

son las ecuaciones del plano pedido (obvio que tal plano es paralelo al eje z y su intersección con el plano xy es la recta de ecuación $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-2=0$.)

Problema 10

Parametrizar la superficie $\mathcal{S}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2\le 1,\ z=0\}$.

Solución

Se trata de un *disco* de centro $(0,0,0)$ y radio 1, contenido en el plano de ecuación $z=0$. Por lo tanto, $\Phi(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta,0)$ con $\theta\in[0,2\pi];\ \rho\in[0,1]$ (ver fig 1.15).

Nota didáctica: Compare esta parametrización (que es la de un disco de radio 1) con la del ejercicio anterior (que es la de un cilindro con circunferencia generatriz de radio 1). Observe que allá no figuró ρ, mientras que aquí sí, para poder recorrer todo el disco desde $\rho=0$ hasta $\rho=1$. El alumno debe asimilar que no estamos haciendo *cambio de variables* sino construyendo una prametrización.

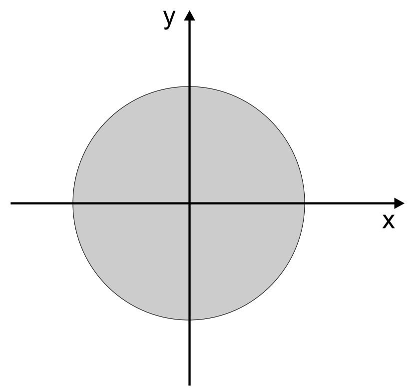


Figura 1.15:

Problema 11
Calcular el área de la porción de superficie esférica dada por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, interior al sólido descrito por $x^2 + y^2 \leq ay, \ \ a > 0$.

Solución
Estudiemos el borde del sólido dado por $x^2 + y^2 \leq ay, \ \ a > 0$, el cual está representado por $x^2 + y^2 = ay \Rightarrow$ completando cuadrados obtenemos: $x^2 + \left(y - \dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{4}$, lo cual en el espacio representa la superficie de un cilindro. Su circunferencia generatriz tiene centro en el punto $\left(0, \dfrac{a}{2}\right)$ y radio $\dfrac{a}{2}$. La superficie $\mathcal{S}$ cuya área queremos calcular está demarcada en la figura 1.16.

Se observa que hay una porción de $\mathcal{S}$ en el hemisferio superior y otra igual en el inferior, y como además

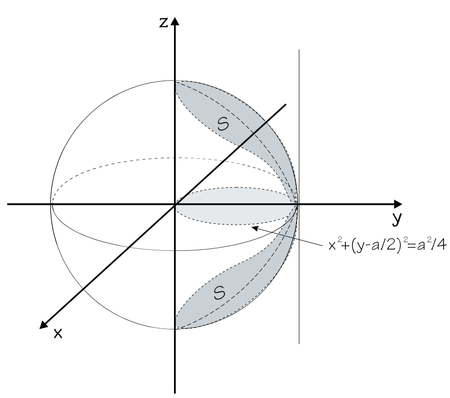


Figura 1.16:

hay simetría respecto del plano zy podemos calcular $\frac{1}{4}$ del área y simplificar el problema en cartesianas con $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = f(x, y)$. Se tiene entonces,

$\Phi(x, y) = (x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}), \ T_x \times T_y = (-z_x, -z_y, 1) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, 1\right)$

y $\|T_x \times T_y\| = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2 + \left(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right)^2}{\left(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right)^2}} = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2 + a^2 - x^2 - y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$.

Así,

$$\frac{1}{4}A(\mathcal{S}) = a\iint_{D=\text{Proy}_{xy}\mathcal{S}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = \underbrace{a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\,\text{sen}\,\theta} \frac{\rho d\rho d\theta}{\sqrt{a^2-\rho^2}}}_{\text{Haciendo cambio de variables a coordenadas polares}}$$

$$= -a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-\rho^2}\Big|_{\rho=0}^{\rho=a\,\text{sen}\,\theta} d\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\,\text{sen}\,\theta)d\theta = a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

$$\Rightarrow A(\mathcal{S}) = 4a^2\left(\frac{\pi-2}{2}\right) = 2a^2(\pi-2).$$

Recuérdese que Abs (Jacobiano en polares) $=\rho$ y que $D = \text{Proy}_{xy}\mathcal{S} = T(D^*)$, siendo
$\left\{\begin{array}{llll} \text{T}: & \text{Plano}\ \theta\rho & \to & \text{Plano}\ xy \\ D^* & & \to & D \end{array}\right.$, así que T$(D^*) = D \Rightarrow D^* = T^{-1}(D)$.

Ahora, como $\text{Proy}_{xy}\mathcal{S}$ es el disco de la figura 1.17,
construimos D^* la nueva zona de integración: (ver fig. 1.18)

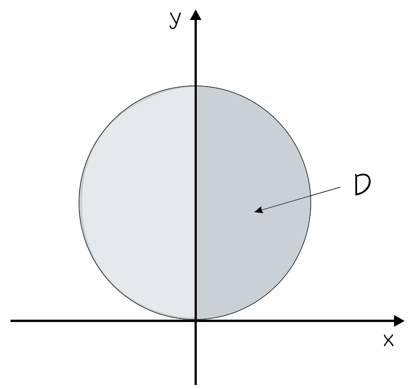


Figura 1.17:

$x^2+y^2 = ay$ en polares $\Rightarrow \rho^2 = a\rho\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow \rho = a\,\text{sen}\,\theta, \quad \theta = 0 \Rightarrow \rho = 0, \quad \theta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \rho = a$ y ρ es función continua y

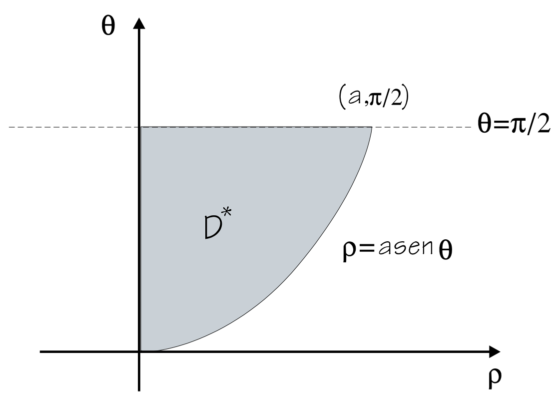


Figura 1.18:

creciente respecto de θ.

Problema 12
Hallar el área de la superficie cortada de la superficie cilíndrica de ecuación $x^2+z^2 = a^2$ por la de ecuación

$x^2 + y^2 = a^2$

Solución

La porción $\mathcal{S}^*$ de superficie es un octavo de la superficie total $\mathcal{S}(ver fig.$1.19$)$, $\quad A(\mathcal{S}) = 8A(\mathcal{S}^*)$.
Ahora, podemos representar $\mathcal{S}^*$ por una ecuación implícita de la forma $F(x,y,z) = x^2 + z^2 - a^2 = 0$ con z función

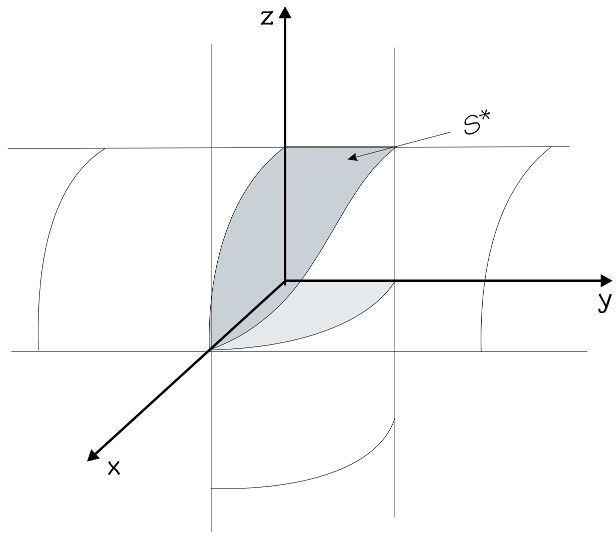


Figura 1.19:

implícita y difderenciable respecto de x y de y.
Aquí el alumno debe reconstriur teóricamente el razonamiento hecho en la oportunidad correspondiente para llegar a $(PVF) = T_x \times T_y = \left(\dfrac{F_x}{F_z}, \dfrac{F_y}{F_z}, 1\right)$ y $\|T_x \times T_y\| = \dfrac{\sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2}}{|F_z|} = \dfrac{\sqrt{4x^2 + 4z^2}}{2|z|} = \dfrac{\sqrt{x^2 + z^2}}{z}$ (puesto que al considerar la octava parte trabajamos en el primer octante donde $z > 0$). Ahora, $\sqrt{x^2 + z^2} = a \Rightarrow \|T_x \times T_y\| = \dfrac{a}{z} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
Por lo tanto,

$$A(\mathcal{S}) = 8 \iint_{D=\mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S}^*} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 8a \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dydx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 8a \int_0^a dx = 8a^2.$$

Problema 13

Calcular el área de la parte de la superficie cónica dada por $x^2 + y^2 = z^2, \ \ z \geq 0$, que está dentro de la esfera sólida dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 6z$.

Solución

$x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = (\tan^2\varphi)z^2$ con $\varphi = \dfrac{\pi}{4}, \tan\varphi = 1.$

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 6z \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-3)^2 \leq 9.$

Ahora, para hallar el borde superior de $\mathcal{S}$ (fig. 1.20), intersectemos $\left\{\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow 2z^2 - 6z =$

$2z(z-3) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} z_1 = 0 & \Rightarrow & x = y = 0 \\ z_2 = 3 & \Rightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & 9 \\ z & = & 3 \end{array}\right\} \end{array}\right.$ donde z_2 corresponde a una circunferencia de centro en el eje z en el punto $(0,0,3)$ y radio 3.

Parametrizando $\mathcal{S}: \quad \Phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho)$ ya que así, $x^2 + y^2 = \rho^2 = z^2$ con $\rho \in [0,3]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$.

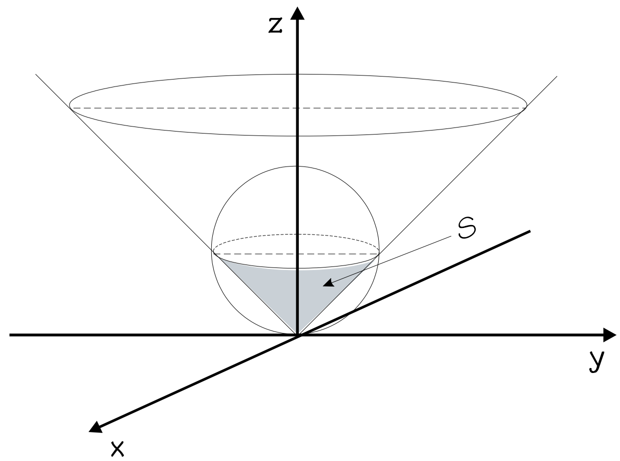


Figura 1.20:

Demuestre que $T_\rho \times T_\theta = (-\rho\cos\theta, -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho)$, $\|T_\rho \times T_\theta\| = \sqrt{2}\rho$.

$$A(\mathcal{S}) = \iint_{D=\Phi^{-1}(\mathcal{S})} \sqrt{2}\rho = \underbrace{\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^3 \rho\, d\rho\, d\theta}_{\text{No estamos cambiando variables}} = 9\pi\sqrt{2}.$$

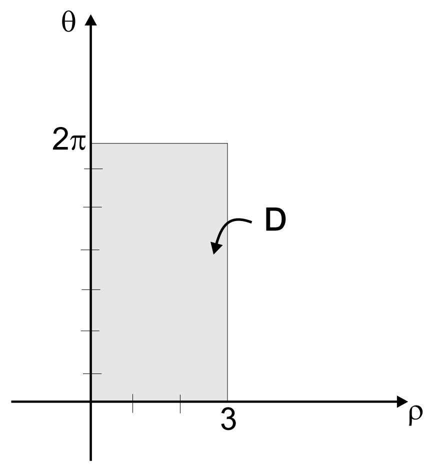


Figura 1.21: Problema 13

Problema 14
Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $10 - x^3 - 3xy - z^2 = 0$, en el punto $(2, 1/3, 0)$, suponiendo que la ecuación define a x como función implícita y diferenciable con respecto a y y a z.

Solución
Sea $F(x,y,z) = 10 - x^3 - 3xy - z^2 = 0$, se demuestra que

$$T_y \times T_z = \left(1, \frac{F_y}{F_x}, \frac{F_z}{F_x}\right) = \left(1, \frac{3x}{3x^2+3y}, \frac{2z}{3x^2+3y}\right), \quad (T_y \times T_z)_{(2,\frac{1}{3},0)} = \left(1, \frac{6}{13}, 0\right),$$

$$\left(1, \frac{6}{13}, 0\right) \cdot \left(x-2, y-\frac{1}{3}, z\right) = 0 \Leftrightarrow 13x - 6y - 28 = 0.$$

Problema 15

Sea $\mathcal{S}$ la superficie dada por $z = \dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{32}$. Hallar el área de la porción de $\mathcal{S}$, que se encuentra debajo de la intersección entre $\mathcal{S}$ y el cilindro elíptico dado por $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{256} = 1$.

Solución

Haciendo $y = 0$ y $x = 0$, respectivamente, obtenemos:

$y = 0 \Rightarrow z = \dfrac{x^2}{18}$, $x = 0 \Rightarrow z = \dfrac{y^2}{32}$.

$T_x \times T_y = (-z_x, -z_y, 1) = \left(-\dfrac{x}{9}, -\dfrac{y}{16}, 1\right) \Rightarrow \|T_x \times T_y\| = \sqrt{\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{256} + 1}$ (Ver fig. 1.22).

$A(\mathcal{S}) = \displaystyle\iint_{D=\mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S}} \sqrt{\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{256} + 1}.$ Pasar a coordenadas elípticas ya que D es una elipse.

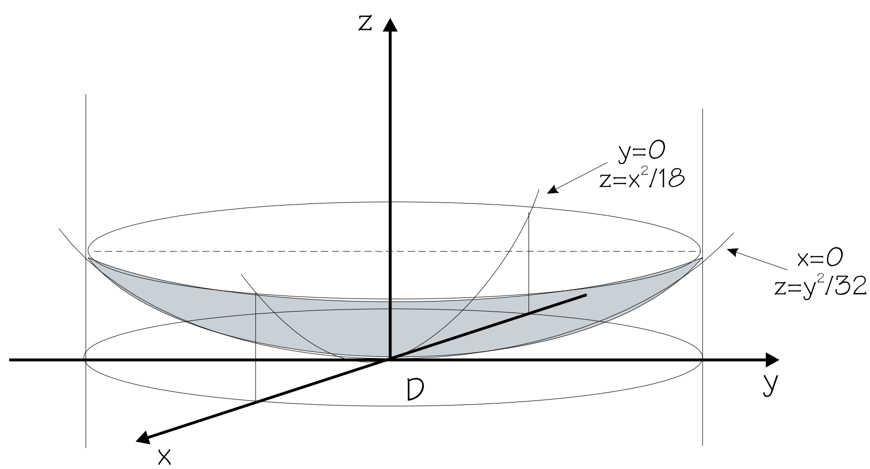


Figura 1.22:

$x = 9\rho\cos\theta, y = 16\rho\operatorname{sen}\theta$, Abs. Jacobiano$= 9 * 16 * \rho$.

Por lo tanto,

$A(\mathcal{S}) = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1 144\rho\sqrt{1+\rho^2}\ d\rho d\theta$, ya que $D^* = T^{-1}(D)$ es el rectángulo $[0, 1] \times [0, 2\pi]$.

Entonces, $A(\mathcal{S}) = 144 \times 2\pi \times \left[(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = 96\pi\ (2\sqrt{2} - 1)$.

Problema 16

Hallar el área de la parte de paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ debajo del plano de ecuación $z = k^2$.

Solución

La gráfica se muestra en la fig. 1.23. $T_x \times T_y = (-2x, -2y, 1)$, $\|T_x \times T_y\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$.

$$A(\mathcal{S}) = \iint_{D=\text{Proy}_{xy}\mathcal{S}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

Pasando a coordenadas polares,

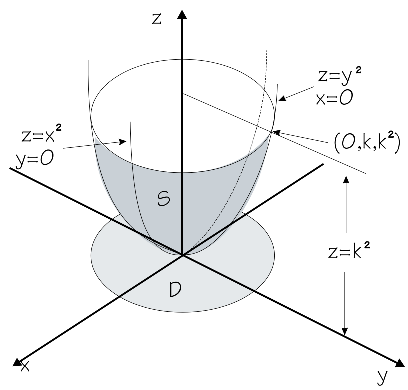


Figura 1.23:

$$A(\mathcal{S}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{k} \rho\sqrt{4\rho^2 + 1} d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3} \times \frac{1}{8}(4\rho^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\right]_{\rho=0}^{\rho=k} d\theta$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^{2\pi} \left[(4k^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 1\right] d\theta = \frac{\pi}{16}\left[(4k^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 1.\right]$$

Problema 17

Sea $\alpha(t) = (t^3 \ ,0 \ ,t^2 + 1), \ \ t \in [-2, 2]$, una curva contenida en el plano xz de $\mathbb{R}^3$. Sea $\mathcal{S}$ la superficie obtenida al rotar la curva α alrededor del eje x (una revolución completa).

(a) Hallar una parametrización $\Phi(t, \theta)$ de $\mathcal{S}$ usando el parámetro t de la curva α y un parámetro θ que mida un ángulo de rotación alrededor del eje x.

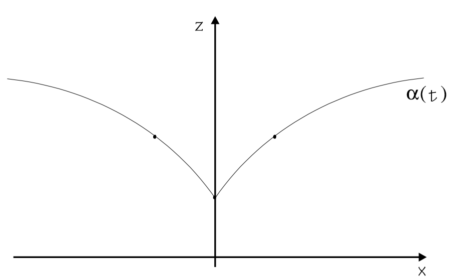
(b) Hallar los puntos donde Φ es una superficie parametrizada suave ($\Phi_t \times \Phi_\theta \neq (0, 0, 0)$).

(c) Hallar la ecuación del plano tangente a $\mathcal{S}$ en el punto $P(1, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \in \mathcal{S}$.

Solución

(a) Elegir θ el ángulo formado por la proyección del punto $(x, y, z) \in \mathcal{S}$, en el plano yz con el semieje y positivo (ver fig. 1.24).

Así que, $\Phi(t, \theta) = (t^3 \ , (t^2 + 1)\cos\theta \ , (t^2 + 1)\,\text{sen}\,\theta), \ \ t \in [-2, 2], \ \ \theta \in [0, 2\pi]$.



t	
0	(0,0,1)
-1	(-1,0,2)
1	(1,0,2)

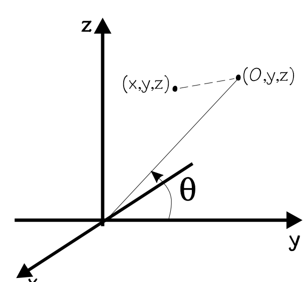


Figura 1.24:

(b) Demuestre que $T_t \times T_\theta = t(t^2+1)(2, -3t\cos\theta, -3t\,\mathrm{sen}\,\theta)$, $\quad T_t \times T_\theta = (0,0,0) \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow \Phi(0,\theta) =$

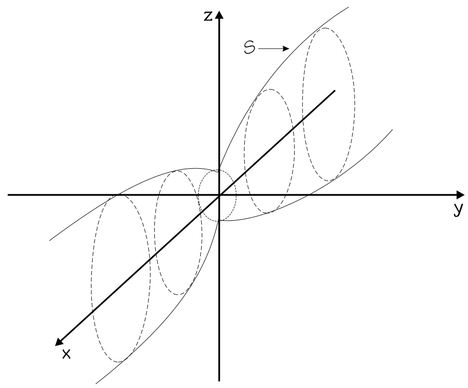


Figura 1.25:

$(0, \cos\theta, \,\mathrm{sen}\,\theta) \Rightarrow y^2 + z^2 = 0.$

Por lo tanto, $\mathcal{S}$ es superficie parametrizada *suave* excepto en los puntos de la circunferencia unitaria en el plano yz con centro en el origen (ver fig. 1.25).

(c) $(1, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = \Phi(t_0, \theta_0) \Leftrightarrow (1, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \equiv (t_0, (t_0^2+1)\cos\theta_0, (t_0^2+1)\,\mathrm{sen}\,\theta_0) \Leftrightarrow 1 = t_0, \quad \sqrt{2} = (t_0^2+1)\cos\theta_0, \quad \sqrt{2} = (t_0^2+1)\,\mathrm{sen}\,\theta_0 \Leftrightarrow t_0 = 1, \;\; \theta_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

La ecuación del plano tangente será:

$t(t^2+1)(2, -3t\cos\theta, -3t\,\mathrm{sen}\,\theta)_{\left(1, \frac{\pi}{4}\right)} .(x-1, y-\sqrt{2}, z-\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow$

$\left(4, -3\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -3\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) .(x-1, y-\sqrt{2}, z-\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3\sqrt{2}y - 3\sqrt{2}z + 8 = 0$ es la ecuación del plano tangente a $\mathcal{S}$ en el punto $P(1, \sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Problema 18

Sea $\mathcal{S}_1$ la porción de superficie esférica dada por $x^2+y^2+z^2 = 3$, interior al paraboloide de ecuación $x^2+y^2-2z = 0$. Hallar el área de $\mathcal{S}_1$.

(a) Considerando la *Parametrización General* de una esfera.

(b) Con $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$.

(c) Sea $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, con $\mathcal{S}_2$ la parte de superficie de paraboloide interior a la esfera sólida. Calcular $A(\mathcal{S})$.

Solución

$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2+y^2+z^2 & = & 3 \\ x^2+y^2 & = & 2z \end{array} \right\} \Rightarrow 2z + z^2 = 3 \Rightarrow z^2 + 2z - 3 = 0 \Rightarrow z_1 = 0, \quad z_2 = -3.$

Se desprecia $z_2 = -3$ ya que $x^2+y^2 \geq 0$. Por lo tanto, $z = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 2 \\ z & = & 1 \end{array} \right\}$ ecuaciones de la curva intersección (ver fig. 1.26).

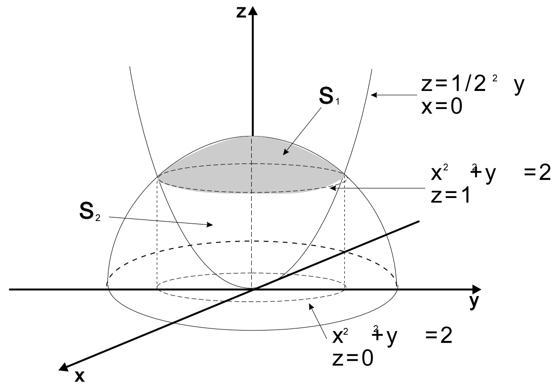


Figura 1.26:

(a) $\Phi_1(\theta,\varphi)=(\sqrt{3}(\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi,\sqrt{3}(\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\varphi,\sqrt{3}\cos\varphi)$, demuestre que
$T_\theta\times T_\varphi=(-\sqrt{3}\operatorname{sen}\varphi)((\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi,(\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\varphi,\cos\varphi)$ y $\|T_\theta\times T_\varphi\|=3|\operatorname{sen}\varphi|=3\operatorname{sen}\varphi$ ya que $\varphi\in[0,\arctan\sqrt{2}]$ (ver fig. 1.27).

$$\begin{aligned}
A(\mathcal{S}_1) &= 3\iint_{D=\Phi^{-1}(\mathcal{S}_1)}\operatorname{sen}\varphi = 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan\sqrt{2}}\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi d\theta = 3\int_0^{2\pi}-(\cos\varphi)_0^{\arctan\sqrt{2}}\,d\theta\\
&= -3\times 2\pi\times(\cos(\arctan\sqrt{2})-1)=6\pi(1-\cos(\arctan\sqrt{2}))\approx 6\pi(1-0,5773502692)\\
&\approx 7.966759736.
\end{aligned}$$

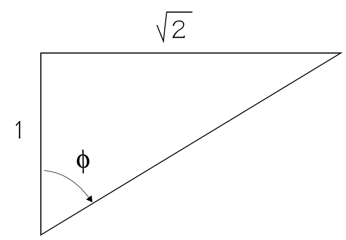


Figura 1.27:

(b) Con $z=\sqrt{3-x^2-y^2}=f(x,y)$, $\Phi_1(x,y)=(x,y,\sqrt{3-x^2-y^2})$,

$$(T_x\times T_y)=(-z_x,-z_y,1)=\left(\frac{x}{\sqrt{3-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{3-x^2-y^2}},1\right),\quad \|T_x\times T_y\|=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3-x^2-y^2}},$$

$$A(\mathcal{S}_1)=\iint_{D=\operatorname{Proy}_{xy}(\mathcal{S}_1)}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3-x^2-y^2}}$$

$$\overset{\text{pasando a coord. polares}}{=}\sqrt{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\frac{\rho}{\sqrt{3-\rho^2}}\,d\rho d\theta=2\sqrt{3}\,\pi\,(\sqrt{3}-1)\approx 7.966759736$$

(c) $\mathcal{S}=\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2\Rightarrow A(\mathcal{S})=A(\mathcal{S}_1)+A(\mathcal{S}_2)$.
Ahora, para $\mathcal{S}_2$, $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $\Phi_2(x,y)=\left(x,y,\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$, $(T_x\times T_y)_2=(-x,-y,1)$,

$\|(T_x\times T_y)_2\|=\sqrt{x^2+y^2+1}$.

$$A(\mathcal{S}_2)=\iint_{D=\operatorname{Proy}_{xy}(\mathcal{S}_2)}\sqrt{x^2+y^2+1}\overset{\text{usar coordenadas polares}}{=}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\rho\sqrt{\rho^2+1}\,d\rho d\theta=\frac{2\pi}{3}(3\sqrt{3}-1).$$

Por lo tanto, $A(\mathcal{S}) = 2\sqrt{3}\pi(\sqrt{3}-1) + \dfrac{2\pi}{3}(3\sqrt{3}-1) = \dfrac{16}{3}\pi$.

Problema 19
Sea $\mathcal{S}$ la porción de superficie dada por $x - 1 + y^2 = 0$ acotada por los planos de ecuaciones: $z = 0,\ x = 0,\ z + x = 4$ respectivamente.
(a) Demuestre que $(0, -1, 1) \in \mathcal{S}$.
(b) Hallar la ecuación del plano tangente a $\mathcal{S}$ en $(0, -1, 1)$.

Solución
$x = 1 - y^2 = f(y, z)\ \begin{cases} y = 0 & \Rightarrow \quad x = 1 \\ y = \pm 1 & \Rightarrow \quad x = 0 \end{cases}$

Se trata de una *hoja parabólica* (ver fig. 1.28)
$\Phi(y, z) = (1 - y^2, y, z)$.

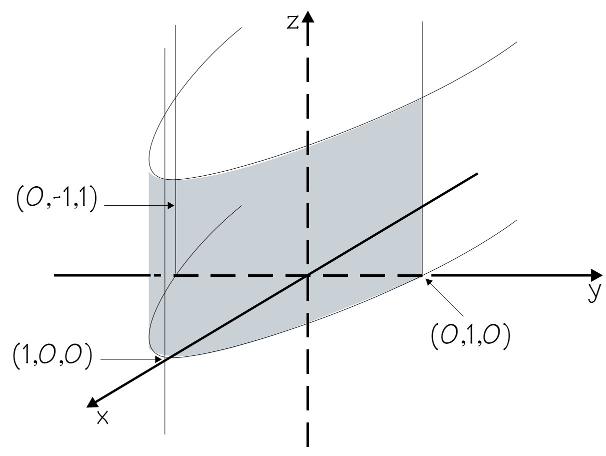


Figura 1.28:

(a) $(0, -1, 1) = \Phi(y_0, z_0) \Leftrightarrow (0, -1, 1) = (1 - y_0^2, y_0, z_0) \Leftrightarrow 0 = 1 - y_0^2,\ \ -1 = y_0,\ \ 1 = z_0 \Leftrightarrow y_0 = -1,\ z_0 = 1 \Rightarrow (0, -1, 1) \in \mathcal{S}$.

(b) Demuestre que $T_y \times T_z = (1, 2y, 0)$.
Por lo tanto, $(T_y \times T_z)_{(-1,1)} = (1, -2, 0) \Rightarrow (1, -2, 0) \cdot (x, y + 1, z - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 2 = 0$ es la ecuación del plano tangente a $\mathcal{S}$ en $(0, -1, 1)$.

Problema 20
Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ la superficie dada por $z = xy,\ 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 3$. Demuestre que $A(\mathcal{S}) \leq 9\sqrt{19}$.

Solución
$\Phi(x, y) = (x, y, xy),\ T_x \times T_y = (-y, -x, 1), \|T_x \times T_y\| = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

$A(\mathcal{S}) = \displaystyle\int_0^3 \int_0^3 \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, dxdy$ pero máx $\sqrt{x^2 + y^2 + 1} \leq \sqrt{19}$ para $0 \leq x \leq 3,\ \ 0 \leq y \leq 3$.

Por lo tanto,

$\int_0^3 \int_0^3 \sqrt{x^2+y^2+1}\, dxdy \le \int_0^3 \int_0^3 \sqrt{19}\, dxdy = 9\sqrt{19}$. Así que, $A(\mathcal{S}) \le 9\sqrt{19}$.

Problema 21

Sea $\left\{ \begin{array}{lcc} \Phi : D \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \to & \Phi(u,v), \end{array} \right.$ una parametrización diferenciable de una superficie $\mathcal{S}$.

Demuestre, que si $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$, $\left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|$, $\left|\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right|$, son los determinantes Jacobianos de $x,y;\ \ y,z;\ \ x,z$ respecto de u y de v, entonces

$$A(\mathcal{S}) = \iint_{D=\Phi^{-1}(\mathcal{S})} \sqrt{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right|^2}.$$

Solución

$$A(\mathcal{S}) = \iint_{D=\Phi^{-1}(\mathcal{S})} \|T_u \times T_v\|.$$

Ahora, $T_u \times T_v = \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array} \right| \vec{i} - \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array} \right| \vec{j} + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right| \vec{k}$

$$= \left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right| \vec{i} - \left|\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right| \vec{j} + \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \vec{k}$$

$\Rightarrow A(\mathcal{S}) = \iint_{D=\Phi^{-1}(\mathcal{S})} \sqrt{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right|^2}$ como queríamos.

Capítulo 2

Integrales de funciones escalares sobre superficies.

Objetivos: En este capítulo el alumno debe aprender el concepto de integral de un campo escalar, sobre una superficie parametrizada. También estudiará algunas aplicaciones físicas, tales como: promedio de una función, área y masa, coordenadas del centro de masa y del centroide de una superficie parametrizada.

2.1 Conceptos básicos

En Ma-2112 se estudió la integral de una función escalar sobre una curva y se denotó:
$\int_{\mathcal{C}} f = \int_{\sigma} f$, definiéndola por $\int_a^b f(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|dt$ con $\sigma(t)$ una parametrización diferenciable de la curva $\mathcal{C}$. Aquí estudiaremos un concepto más general: Integral de una función escalar sobre una superficie parametrizada diferenciable.

Sea $\mathcal{S}$ parametrizada por $\left\{\begin{array}{lll} \Phi : D \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \to & \Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{array}\right.$ con Φ diferenciable o $\mathcal{C}^1(D)$.

Sea además $\left\{\begin{array}{lll} f : \mathrm{Im}\Phi \subset \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \Phi(u,v) & \to & f(\Phi(u,v)) \end{array}\right.$ con $f \in \mathcal{C}(\mathrm{Im}\Phi)$.

(a)*Definición.* $\int_{\mathcal{S}} f = \int_{\mathcal{S}} f(x,y,z) = \int_{\mathcal{S}} f dS = \int\int_{\mathcal{S}} f dS$ (notaciones) se define como

$$\int\int_{D=\Phi^{-1}(\mathcal{S})} f(\Phi(u,v))\|T_u \times T_v\|.$$

Nota: Si $f(x,y,z) = 1 \Rightarrow \int_{\mathcal{S}} f = \int\int_D \|T_u \times T_v\| = \mathrm{Area}(\mathcal{S})$. De modo que $A(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} 1$.

(b) *Definición.* Si $\mathcal{S}$ es unión de n superficies parametrizadas diferenciables o $\mathcal{C}^1$, o sea, $\mathcal{S} = \uplus \mathcal{S}_i$ con $i = 1, \cdots, n$, (donde (-) significa unión disjunta, esto es: $\cap \mathcal{S}_i =$ conjunto vacío) entonces $\int_{\mathcal{S}} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{S}_i} f$.

(c) *Definición.* Si la densidad de masa $\delta(x,y,z)$ de una superficie $\mathcal{S}$ es conocida, entonces, la masa total de $\mathcal{S}$ viene dada por: $M(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} \delta(x,y,z)$.

(d) *Definición.* Las coordenadas del centro de masa de $\mathcal{S}$ son:
$x_M = \dfrac{1}{M(\mathcal{S})}\displaystyle\int_{\mathcal{S}} x\ \delta(x,y,z);\ \ y_M = \dfrac{1}{M(\mathcal{S})}\displaystyle\int_{\mathcal{S}} y\ \delta(x,y,z);\ \ z_M = \dfrac{1}{M(\mathcal{S})}\displaystyle\int_{\mathcal{S}} z\ \delta(x,y,z).$

(e) Las coordenadas del centroide de $\mathcal{S}$ son: $x_c = \dfrac{1}{\mathrm{a}(\mathcal{S})}\displaystyle\int_{\mathcal{S}} x;\ \ y_c = \dfrac{1}{\mathrm{a}(\mathcal{S})}\displaystyle\int_{\mathcal{S}} y;\ \ z_c = \dfrac{1}{\mathrm{a}(\mathcal{S})}\displaystyle\int_{\mathcal{S}} x.$

2.2 Ejercicios resueltos

Problema 1

Evaluar $\dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int_{\mathcal{S}} z\ dS$ con $\mathcal{S}$ la semi-esfera superior de radio 2.

Solución
Se trata de calcular $\dfrac{1}{8\pi}*$ (una integral de campo escalar sobre una superficie).
El problema podría haber sido propuesto de esta otra manera:
Evaluar $\dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int_{\mathcal{S}} z\ dS$ con $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 4;\ \ z \geq 0\}$ (ver fig. 2.1).

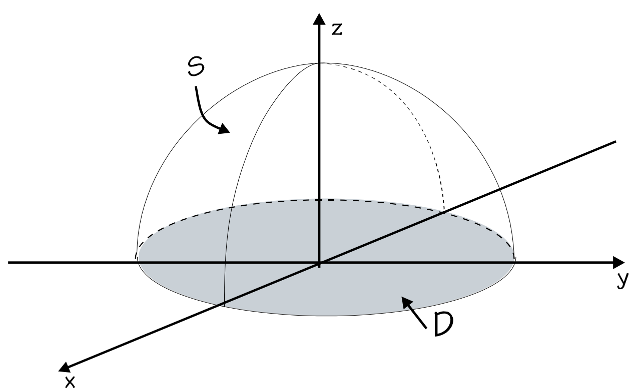


Figura 2.1: $D = \mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 4,\ \ z = 0\}$

Aquí podemos usar la parametrización en cartesianas (puesto que $z \geq 0$) y poner $z = \sqrt{4-x^2-y^2} = f(x,y),\quad \Phi(x,y) = (x, y, \sqrt{4-x^2-y^2})$, se calcula
$T_x \times T_y = (-f_x, -f_y, 1) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1\right) \Rightarrow \|T_x \times T_y\| = \dfrac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$
Por lo tanto,
$\displaystyle\int_{\mathcal{S}} z\ dS = \iint_{D=\mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S}} z(\Phi(x,y))\|T_x \times T_y\| = \iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} = 2\iint_D 1 = 2A(D) = 2\pi * 2^2 = 8\pi \Rightarrow \frac{1}{8\pi}\int_{\mathcal{S}} z\ dS = \frac{8\pi}{8\pi} = 1.$

Problema 2
Repita el ejercicio 1 pero usando la *parametrización general.*

Solución

$\dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int_{\mathcal{S}} z, \quad \mathcal{S}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2=4,\ \ z\geq 0\}.$

Aquí $\Phi(\theta,\varphi)=(2(\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi, 2(\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\varphi, 2\cos\varphi)$ con $\theta\in[0,2\pi]$, pero $\varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Se calcula $T_\theta\times T_\varphi=-4(\operatorname{sen}\varphi)((\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi,(\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\varphi,\cos\varphi)$ y $\|T_\theta\times T_\varphi\|=4|\operatorname{sen}\varphi|=4\operatorname{sen}\varphi$ ya que $\varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Por lo tanto,

$\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} z=\int_{D=\Phi^{-1}(\mathcal{S})} z(\Phi(\theta,\varphi))\|T_\theta\times T_\varphi\|=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\varphi)*(4\operatorname{sen}\varphi)d\varphi d\theta$ ya que $D=\Phi^{-1}(\mathcal{S})$ es un rectángulo $[0,2]\times[0,\pi/2]$, el cual es de tipo I y tipo II.

Entonces, $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} z=2\pi*4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}(2\varphi)d\varphi=8\pi\Rightarrow\frac{1}{8\pi}\int_{\mathcal{S}} z=1.$

Problema 3

Calcular $\displaystyle\int_{\mathcal{S}}(2x-2y-z)dS, \mathcal{S}$ la frontera de la esfera dada por $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ |\ x^2+y^2+z^2\leq 16\}$.

Solución

Observe que el conjunto dado define a una esfera sólida, es decir, entran los (x,y,z) pertenecientes al interior de la esfera: $x^2+y^2+z^2<16$ y los (x,y,z) de la superficie: $x^2+y^2+z^2=16$ (o sea, la frontera o borde). Podríamos hacer los cálculos utilizando $\Phi(\theta,\varphi)=4((\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi,(\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\varphi,\cos\varphi)$ con $\theta\in[0,2\pi],\ \varphi\in[0,\pi]$. (Se deja como ejercicio). O bien utilizando coordenadas cartesianas con $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ para la semi-esfera superior y $z=-\sqrt{16-x^2-y^2}$ para la semi-esfera inferior.

Así que $\Phi_1(x,y)=(x,y,\sqrt{16-x^2-y^2}),\quad (PVF)_1=\left(\dfrac{x}{\sqrt{16-x^2-y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{16-x^2-y^2}},1\right)$,

$\|(PVF)\|=\dfrac{4}{\sqrt{16-x^2-y^2}}.$

$\Phi_2(x,y)=(x,y,-\sqrt{16-x^2-y^2}),\ (PVF)_1=\left(\dfrac{-x}{\sqrt{16-x^2-y^2}},\dfrac{-y}{\sqrt{16-x^2-y^2}},1\right),\ \ \|(PVF)\|=\dfrac{4}{\sqrt{16-x^2-y^2}}.$

Por lo tanto, $\displaystyle\int_{\mathcal{S}}(2x-2y-z)dS=8\iint_{D_1}\frac{x}{\sqrt{16-x^2-y^2}}-8\iint_{D_1}\frac{y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}+4\iint_{D_1}1+8\iint_{D_2}\frac{x}{\sqrt{16-x^2-y^2}}-8\iint_{D_2}\frac{y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}-4\iint_{D_2}1.$

Ahora, $D_1=\{(x,y,0)\ |\ x^2+y^2\leq 16\},\ \ D_2=\{(x,y,0)\ |\ x^2+y^2\leq 16\}$ por lo que $D_1=D_2\Rightarrow$

$\displaystyle I=\int_{\mathcal{S}}(2x-2y-z)dS=16\iint_{D_1}\frac{x}{\sqrt{16-x^2-y^2}}-16\iint_{D_2}\frac{y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

Pero, recordando que las coordenadas del centroide de una superficie $\mathcal{S}$ son:

$$x_c=\frac{1}{A(\mathcal{S})}\int_{\mathcal{S}} x=\frac{1}{A(\mathcal{S})}\iint_{D=\Phi^{-1}(\mathcal{S})} x(\Phi(x,y))\|PVF\|,$$

$$y_c=\frac{1}{A(\mathcal{S})}\int_{\mathcal{S}} y=\frac{1}{A(\mathcal{S})}\iint_{D=\Phi^{-1}(\mathcal{S})} y(\Phi(x,y))\|PVF\|,$$

$$z_c=\frac{1}{A(\mathcal{S})}\int_{\mathcal{S}} z=\frac{1}{A(\mathcal{S})}\iint_{D=\Phi^{-1}(\mathcal{S})} z(\Phi(x,y))\|PVF\|,$$

y como $A(\mathcal{S}) \neq 0$ en nuestro caso (ya que $\mathcal{S}$ es una superficie esférica) resulta que $\displaystyle\iint_{D_1} \frac{x}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$ y $\displaystyle\iint_{D_2} \frac{y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$ serían $A(\mathcal{S}) * x_c$ para el hemisferio superior y $A(\mathcal{S}) * y_c$ para el hemisferio inferior.

Pero, estando cada semi-esfera con centro en el origen de coordenadas, resulta $x_c = y_c = 0$ y $z_c \neq 0$. Por lo tanto,

$$I = \int_{\mathcal{S}} (2x - 2y - z)\, dS = 16 \left[\iint_{D_1} \frac{x}{\sqrt{16-x^2-y^2}} - \iint_{D_2} \frac{y}{\sqrt{16-x^2-y^2}} \right] = 16(0-0) = 0.$$

Problema 4

El promedio P de una función f sobre una superficie $\mathcal{S}$ se define por $\mathrm{P}(f) = \dfrac{1}{A(\mathcal{S})} \displaystyle\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)dS$ (estamos usando una de las notaciones dadas en la parte (a)). Hallar el promedio de la función $f, f(x,y,z) = x$ sobre la superficie descrita por la porción de cilindro $z^2 + y^2 = 4$ interior a la esfera $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16$ con $x \geq 0$.

Solución

Como $\mathcal{S}$ (ver fig. 2.2) es parte del cilindro, debemos parametrizar éste: $\Phi(\theta, x) = (x, 2\,\mathrm{sen}\,\theta, 2\cos\theta)$.
Obsérvese que aquí $y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \ z = 2\cos\theta,\ \ \theta \in [0, 2\pi],\ \ 0 \leq x \leq \sqrt{8(1+\cos\theta)}$. (Ver ejercicio 9 del capítulo 1).

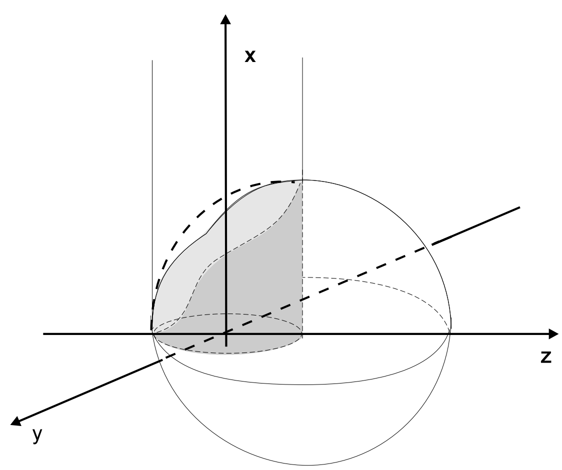


Figura 2.2:

Se calcula $T_\theta \times T_x = (0, 2\,\mathrm{sen}\,\theta, 2\cos\theta) \Rightarrow \|T_\theta \times T_x\| = 2$

$$A(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} 1 = \iint_{D=\Phi^{-1}(\mathcal{S})} \|T_\theta \times T_x\| = 2\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{8(1+\cos\theta)}} dx d\theta \text{ o bien } 2\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\sqrt{8(1+\cos\theta)}} dx d\theta.$$

En todo caso,

$$A(\mathcal{S}) = 2A(D) = 32 \text{ y } \mathrm{P}(f) = \frac{1}{32}\int_{\mathcal{S}} x = \frac{1}{32}\iint_{D=\Phi^{-1}(\mathcal{S})} x = \frac{1}{32}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\sqrt{8(1+\cos\theta)}} 2x dx d\theta = \frac{1}{32}\times 8\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| d\theta = \frac{16}{32}\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

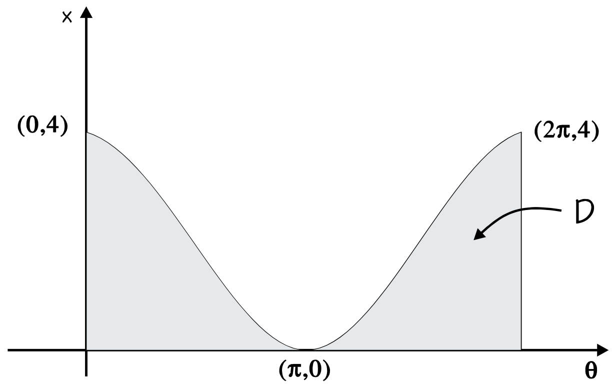


Figura 2.3:

Nota: Si se usa $\theta \in [0, 2\pi], D$ queda como se muestra en la figura 2.3.

Problema 5
Hallar el promedio P de la función $f, f(x, y, z) = z$, sobre la superficie descrita por la porción de cilindro $x^2 + y^2 = 1$ interior a la esfera dada por $(x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \;\; z \geq 0$.

Solución
P= $\dfrac{\pi}{4}$.

Problema 6
Sea $\mathcal{S}$ la región de $\mathbb{R}^3$ acotada lateralmente por $\mathcal{S}_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 4\}$; inferior y superiormente por los planos de ecuaciones $z = 0, \; z = 3 - x$, respectivamente. Calcular $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} (x - y) dS$ (es decir, $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} (x - y)$).

Solución
$z = 3 - x \begin{cases} x = 0 & \Rightarrow & z = 3 \\ z = 0 & \Rightarrow & x = 3 \end{cases}$
$\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} (x - y) dS = \int_{\mathcal{S}} (x - y) = \int_{\mathcal{S}_1} (x - y) + \int_{\mathcal{S}_2} (x - y) + \int_{\mathcal{S}_3} (x - y).$
Ver fig 2.4.
Para $\mathcal{S}_1 : \Phi_1(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, z), \;\; T_\theta \times T_z = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0), \;\; \|T_\theta \times T_z\| = 2.$
Podemos usar, por ejemplo, $\theta \in [0, 2\pi], z \in [0, 3 - 2\cos\theta]$. Así que D en el plano θz viene dada por (ver fig 2.5):
Para $\mathcal{S}_2 = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$, aquí $x^2 + y^2 \leq 4, z = 0 = g(x, y), \quad \Phi_2(x, y) = (x, y, 0),$
$T_x \times T_y = (0, 0, 1), \;\; \|T_x \times T_y\| = 1,$
Para $\mathcal{S}_3 = \{(x, y, z) \mid z = 3 - x\}, \;\; z = 3 - x = f(x,y), \;\; T_x \times T_y = (-f_x, -f_y, 1) = (1, 0, 1),$
$\|T_x \times T_y\| = \sqrt{2}$. (En el ejercicio 10 del capítulo 1, se usó otra parametrización para $x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0$.)

Ahora,

$\displaystyle\int_{\mathcal{S}} (x - y) = 2\int_0^{2\pi} \int_0^{3 - 2\cos\theta} (2\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta) \; dz d\theta + \iint_{D_2} (x - y) + \sqrt{2} \iint_{D_3} (x - y)$ con $D_2 = \mathcal{S}_2$ y

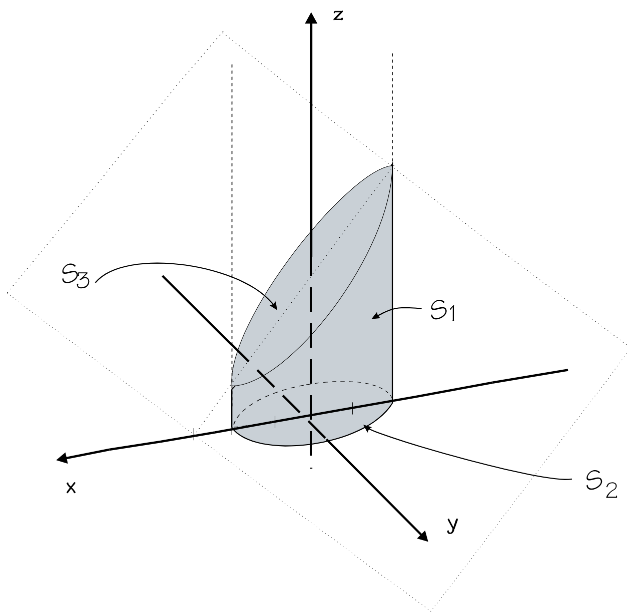


Figura 2.4:

$D_3 = \mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S}_3 = D_2 = \mathcal{S}_2$.
Para la segunda y tercera integral se tiene respectivamente,

$$\begin{aligned}\int_{D_2}(x-y) &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} 1\cdot(x-y)dxdy \overset{\text{en coord. polares}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho(\rho\cos\theta-\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\rho^3|_0^2(\cos\theta-\,\mathrm{sen}\,\theta)d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{2\pi}(\cos\theta-\,\mathrm{sen}\,\theta)d\theta = 0.\end{aligned}$$

(Recordar que $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^k(n\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}\,\mathrm{sen}\,^k(n\theta)d\theta$ si k es impar).

Y $\displaystyle\sqrt{2}\iint_{D_3}(x-y) = \sqrt{2}\iint_{D_2}(x-y) = 0.$

Nota didáctica: También $\displaystyle\iint_{D_2=D_3}(x-y) = \iint_{D_2}x - \iint_{D_2}y = 0-0=0$ si se utiliza el hecho de que $\displaystyle\frac{1}{A(D)}\iint_D x = x_c, \iint_D y = y_c,\ \ (x_c,y_c) =$ centroide de una lámina plana D, aquí en este problema $D = D_2 = D_3$ y $A(D_2) = A(D_3) = \pi\times 2^2 = 4\pi \neq 0 \Rightarrow \displaystyle\iint_{D_2}x = \iint_{D_3}y$, puesto que aquí $x_c = y_c = 0$.

Finalmente: $\displaystyle 2\int_0^{2\pi}\int_0^{3-2\cos\theta}(2\cos\theta-2\,\mathrm{sen}\,\theta)\ dzd\theta = 4\int_0^{2\pi}(\cos\theta-\,\mathrm{sen}\,\theta)(3-2\cos\theta)\ d\theta$

$$= 4\int_0^{2\pi}(3\cos\theta-2\cos^2\theta-3\,\mathrm{sen}\,\theta+2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)\ d\theta$$

$$= 12\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\theta\ d\theta}_{0} - 12\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,\theta\ d\theta}_{0} + 4\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,(2\theta)\ d\theta}_{0} - 8\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\ d\theta = -8\pi.$$

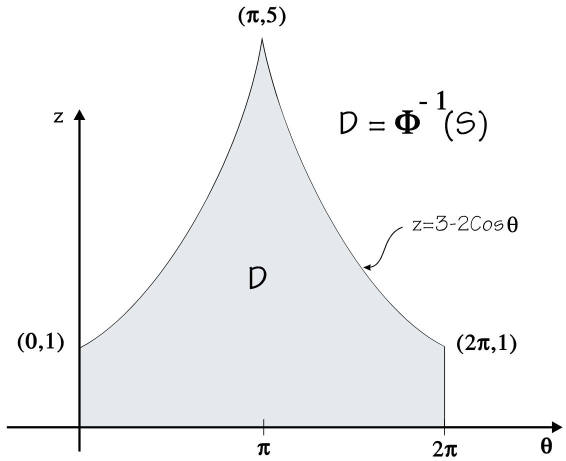


Figura 2.5:

Problema 7
Sea $\mathcal{S}$ la superficie dada por $2z = x^2 + y^2$; limitada por el plano de ecuación $x = 2z$ en el primer octante. Calcular $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} \frac{xy}{z}$

Solución
$2z = x^2 + y^2 \Rightarrow z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad x = 0 \Rightarrow z = \dfrac{1}{2}\,y^2, \;\; y = 0 \Rightarrow z = \dfrac{1}{2}\,x^2.$

Ahora, intersectando $\left\{ \begin{array}{rcl} 2z & = & x^2 + y^2 \\ x & = & 2z \end{array} \right. \Rightarrow x = x^2 + y^2 \Rightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}, \quad x = 2z$, por lo que, proyectando sobre el plano $xy \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 & = & \dfrac{1}{4} \\ z & = & 0 \end{array} \right.$ (ver fig 2.6).

Ahora, ampliando la intersección del plano $x = 2z$ con el paraboloide $z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$ y la proyección de $\mathcal{S}$ sobre el

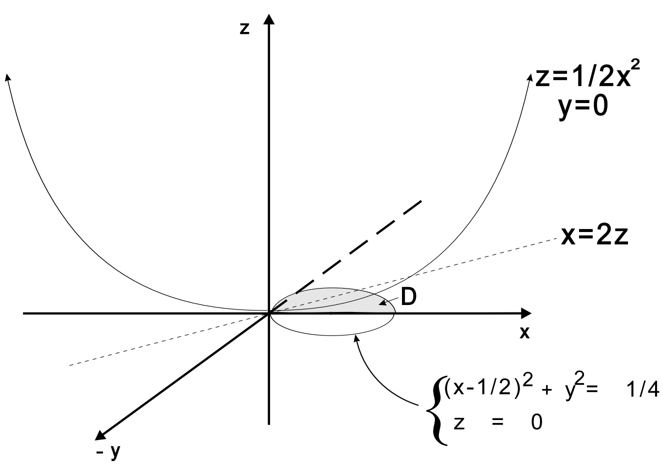


Figura 2.6:

plano xy, se obtiene la fig 2.7.
Por lo tanto,

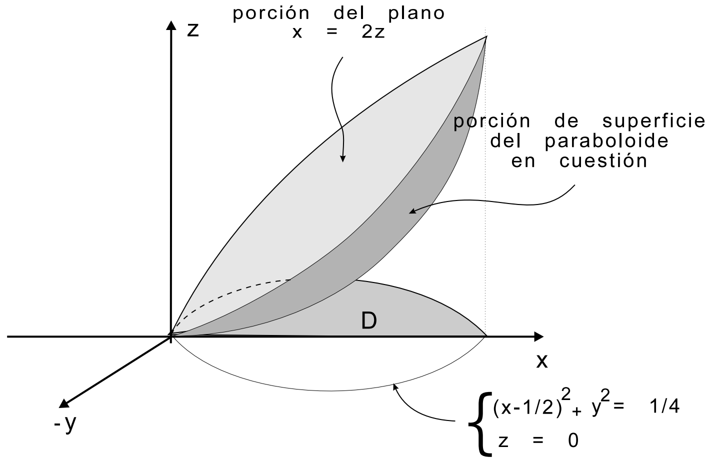


Figura 2.7:

$\mathcal{S}: z = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2) = g(x,y),\quad \Phi(x,y) = (x, y, \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)),\ T_x \times T_y = (-x,-y,1),$
$||T_x \times T_y|| = \sqrt{x^2+y^2+1}.$

$\left(\dfrac{xy}{z}\right)$ evaluada en $\Phi(x,y)$ es $\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

$\displaystyle\int_{\mathcal{S}} \frac{xy}{z} = \iint_{D=Proy_{xy}\mathcal{S}} \frac{2xy}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+1}$ y pasando a coordenadas polares, tenemos, $\ x = \rho\cos\theta,$

$y = \rho \operatorname{sen}\theta, Abs(\det \text{ Jacobiano en polares}) = \rho, \Rightarrow \dfrac{2xy}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+1} = \dfrac{2\rho^2(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta}{\rho^2}\sqrt{\rho^2+1}$

$= \sqrt{\rho^2+1}\operatorname{sen}(2\theta)$ y $D^* = T^{-1}(D)$ con $D = \operatorname{Proy}_{xy}\mathcal{S}$ en el primer cuadrante y T: transformación en polares (ver fig 2.8).

Por lo tanto,

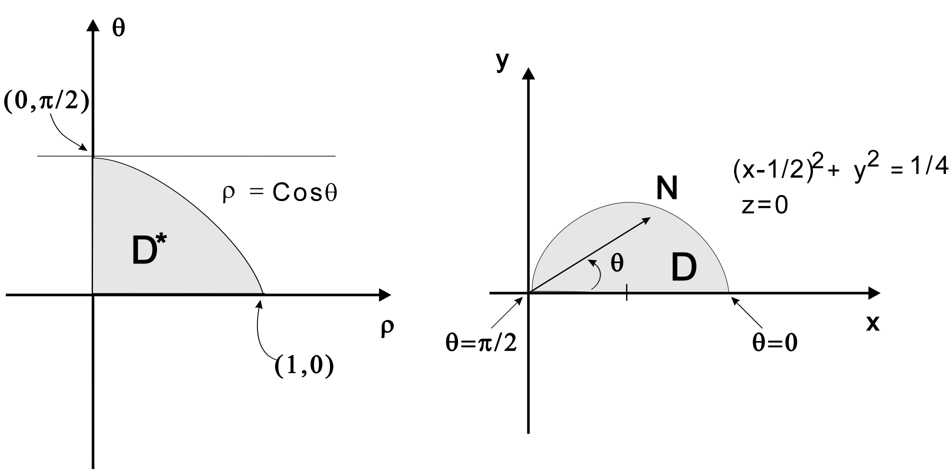


Figura 2.8:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \frac{xy}{z} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta} \rho\sqrt{1+\rho^2}(\,\mathrm{sen}\,(2\theta))\; d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\,\mathrm{sen}\,(2\theta))\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\left[(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\cos\theta}\; d\theta\\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(1+\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}-1\right](\,\mathrm{sen}\,(2\theta))\; d\theta\\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}\times 2(\,\mathrm{sen}\,\theta)(\cos\theta)d\theta - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{sen}\,(2\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

Ahora, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\,\mathrm{sen}\,\theta)(\cos\theta)(1+\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}d\theta = -\frac{1}{2}\int_2^1 v^{\frac{3}{2}}dv = \frac{1}{5}\left(2^{\frac{5}{2}}-1\right)$, con $v = 1+\cos^2\theta$,
$dv = -2(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta.$

Por lo tanto, $\displaystyle\int_{\mathcal{S}}\frac{xy}{z} = \frac{2}{15}\left(2^{\frac{5}{2}}-1\right)-\frac{1}{3} = \frac{8\sqrt{2}-7}{15}.$

Problema 8
Calcular $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\; dS$, con $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$ y $\mathcal{S}$ es la porción de hiperboloide dado por $x^2+y^2-z^2=a^2$ comprendida entre los planos de ecuaciones $z=0$ y $z=k$, respectivamente. (Expresar el resultado en función de a y k).

Solución
Ver el ejercicio 7a del capítulo 1 para una parametrización de $\mathcal{S}$ y el dibujo correspondiente.

$\Phi(\theta,z) = (\sqrt{a^2+z^2}\cos\theta, \sqrt{a^2+z^2}\,\mathrm{sen}\,\theta, z),\;\; \theta\in[0,2\pi],\; z\in[0,k],\;\; \|T_\theta\times T_z\| = \sqrt{a^2+2z^2}.$

$\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\; dS = \iint_D f(\Phi(\theta,z))\|T_\theta\times T_z\| = \int_0^{2\pi}\int_0^k \frac{\sqrt{a^2+2z^2}}{a^2+2z^2}\; dzd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^k\frac{1}{\sqrt{a^2+2z^2}}\; dzd\theta.$

Hacemos el cambio $z = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\mathrm{senh}t, z=0\Rightarrow t=0,\; z=k\Rightarrow t=\mathrm{arcsenh}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{a}k\right)\;\Rightarrow dz = \dfrac{a}{\sqrt{2}}(\cosh t)\; dt$

$\Rightarrow \displaystyle\int\frac{dz}{\sqrt{a^2+2z^2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}\int\frac{\cosh t}{\underbrace{\sqrt{a^2+a^2\mathrm{senh}^2 t}}_{a\cosh t}}\; dt$ puesto que $\cosh^2 t - \,\mathrm{sen}\, h^2 t = 1.$

Por lo tanto, $\displaystyle\int\frac{dz}{\sqrt{a^2+2z^2}} = \frac{t}{\sqrt{2}}+c = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arcsenh}\left(\frac{\sqrt{2}}{a}k\right)+c \Rightarrow \int_0^k\frac{dz}{\sqrt{a^2+2z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arcsenh}\left(\frac{\sqrt{2}}{a}k\right).$

Finalmente, $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} f = \sqrt{2}\pi\mathrm{arcsenh}\left(\frac{\sqrt{2}}{a}k\right).$

Problema 9

Calcular $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}}(x^2+y^2)\; dS$, con $\mathcal{S}$ la supeficie del paraboloide dado por $z = 16-x^2-y^2$, sobre el plano xy.

Solución
$D = \mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S} = \{(x,y,0)\mid x^2+y^2\leq 16\},\;\; \Phi(x,y) = (x,y,16-x^2-y^2)$ (ver fig. 2.9)
Demuestre que $T_x\times T_y = (2x,2y,1)\Rightarrow \|T_x\times T_y\| = \sqrt{4x^2+4y^2+1}.$

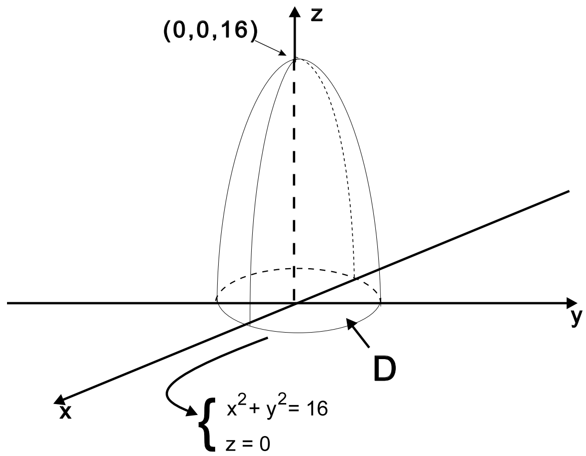


Figura 2.9:

$$\iint_{\mathcal{S}} f = \iint_{D=\text{Proy}_{xy}\mathcal{S}} \sqrt{4x^2+4y^2+1}\ (x^2+y^2) \overset{\text{en coord. polares}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^4 \rho\times\rho^2\sqrt{4\rho^2+1}\, d\rho d\theta.$$

Ahora, $\displaystyle\int \rho^3\sqrt{4\rho^2+1}\, d\rho = \int (\rho\sqrt{4\rho^2+1})\rho^2\ d\rho$

$$\overset{\text{integrando por partes}}{=} \frac{1}{8}\times\frac{2}{3}(4\rho^2+1)^{\frac{3}{2}}\times\rho^2 - \frac{1}{12}\int(4\rho^2+1)^{\frac{3}{2}}\times 2\rho\ d\rho = \frac{1}{12}(4\rho^2+1)^{\frac{3}{2}}\rho^2 - \frac{1}{6}\times\frac{1}{8}\times\frac{2}{5}(4\rho^2+1)^{\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{12}(4\rho^2+1)^{\frac{3}{2}}\rho^2 - \frac{1}{120}(4\rho^2+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \frac{16}{12}(2^6+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{120}(2^6+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{120}$$

$$\Rightarrow \iint_{\mathcal{S}} f = \frac{\pi}{3}\left[8(33)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{40}(33)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{40}\right].$$

Problema 10

Se tiene una superficie metálica $\mathcal{S}$ con forma de la semi-esfera $x^2+y^2+z^2=a^2,\ \ z\geq 0$. Conocemos la densidad de masa de $\mathcal{S}$ en cada punto $P(x,y,z)$ proporcional en este caso a la distancia de P al plano xy. Hallar la masa de $\mathcal{S}$.

Solución

Aquí $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ \delta(x,y,z)=kz,\ \Phi(x,y)=(x,y,\sqrt{a^2-x^2-y^2})$,

$$T_x\times T_y = \left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, 1\right) \Rightarrow \|T_x\times T_y\| = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$\delta(\Phi(x,y)) = k\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

$$M(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}}\delta(x,y,z) = k\iint_{D=\text{Proy}_{xy}(\mathcal{S})}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \Rightarrow$$

$M(\mathcal{S}) = ak\displaystyle\iint_D 1 = ak\times A(D) = ak\times\pi a^2 = k\pi a^3$ unidades de masa.

Problema 11

Hallar la coordenada z_M del centro de masa de la superficie $\mathcal{S}$ del problema anterior.

Solución

$$\begin{aligned} z_M &= \frac{1}{\mathrm{M}(\mathcal{S})}\int_{\mathcal{S}} z\delta(x,y,z) = \frac{1}{k\pi a^3}\iint_D z(\Phi(x,y))\delta(\Phi(x,y))\|T_x \times T_y\| \\ &= \frac{1}{k\pi a^3}\iint_{D=\mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,k\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \end{aligned}$$

con $\mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S} = \{(x,y,0) \mid x^2+y^2 \le a^2\}$,

$$\Rightarrow \iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2} \overset{\text{en coord. polares}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^a \rho\sqrt{a^2-\rho^2}\; d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\left[(a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a\; d\theta = \frac{1}{3}2\pi a^3.$$

Por lo tanto, $z_M = \dfrac{1}{k\pi a^3}\times\dfrac{1}{3}2\pi a^3 = \dfrac{2a}{3k}$.

Capítulo 3

Integrales de funciones vectoriales sobre superficies.

Objetivos: Estudiar el concepto de Integral de una función vectorial sobre una superficie parametizada y luego entender la importante idea de integral de una función vectorial sobre una superficie parametrizada “orientada". También estudiar algunas aplicaciones entre ellas: densidad de flujo promedio de un campo vectorial sobre una superficie.

3.1 Definiciones y teoremas

(a) *Definición* 1.

Sea $\Phi : \begin{cases} D \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \to & \Phi(u,v) \end{cases}$, una parametrización diferenciable o $\mathcal{C}^1$ de una superficie $\mathcal{S}(\Phi(D) = \mathcal{S})$ y sea F un campo vectorial $F : \mathcal{S} = \Phi(D) \to \mathbb{R}^3,\ F \text{ o } \Phi \in \mathcal{C}(D)$. La integral de superficie de F sobre Φ (o sobre $\mathcal{S}$) se denota por $\int_{\mathcal{S}} F = \int_{\mathcal{S}} F \cdot\ dS$ ó $\int\int_{\mathcal{S}} F \cdot dS$ ó $\int_{\Phi} F$ y se define como $\int_{\mathcal{S}} F = \int\int_{D=\Phi^{-1}(\mathcal{S})} F(\Phi(u,v)) \cdot (T_u \times T_v)$. No se colocan los diferenciales $dudv$ ó $dvdu$, puesto que el orden va a depender de que D sea región tipo I o tipo II, respectivamente, en el plano uv (como se estudió en MA-2112).

(b) *Definición* 2. Si se tiene una superficie $\mathcal{S}$, podemos orientarla y definir $\mathcal{S}$ como *superficie orientada*. En este caso, $\mathcal{S}$ tendrá dos lados (o caras), el *lado exterior* o positivo y el *lado interior* o negativo.

En atención a la definición 2, obsérvese que si, por ejemplo, tenemos un plano en $\mathbb{R}^3$, no se sabe cuál es el lado exterior y cuál el interior (ver fig. 3.1).

La orientación prefijada es la que determina el hecho, es decir, de alguna manera tenemos que conocer la orientación. Para ello, introducimos dos vectores *unitarios normales*, el n_1 vector unitario normal exterior a $\mathcal{S}$, y el $n_2 = -n_1$ que será el vector unitario normal interior (o que apunta hacia el interior de $\mathcal{S}$). Ver fig. 3.2

La orientación será dada en cada ejercicio, sin embargo estudiaremos la siguiente definición.

(c) *Definición* 3. Sea $\mathcal{S}$ una superficie parametrizada por Φ, orientada y supongamos que $\mathcal{S}$ es suave en $\Phi(u_0, v_0),\ (u_0, v_0) \in D$. Sea $n(\Phi(u_0, v_0)) = \dfrac{T_{u_0} \times T_{v_0}}{||T_{u_0} \times T_{v_0}||}$.

Si $n(\Phi(u_0, v_0))$ apunta hacia afuera desde el lado exterior de $\mathcal{S}$ se dice que la parametrización Φ preserva la orientación de $\mathcal{S}$; ahora, si $n(\Phi(u_0, v_0))$ apunta hacia afuera desde el lado interior de $\mathcal{S}$, se dice que Φ invierte la orientación de $\mathcal{S}$.
En el texto Marsden y Tromba, puede Ud. ver que para la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, si se selecciona

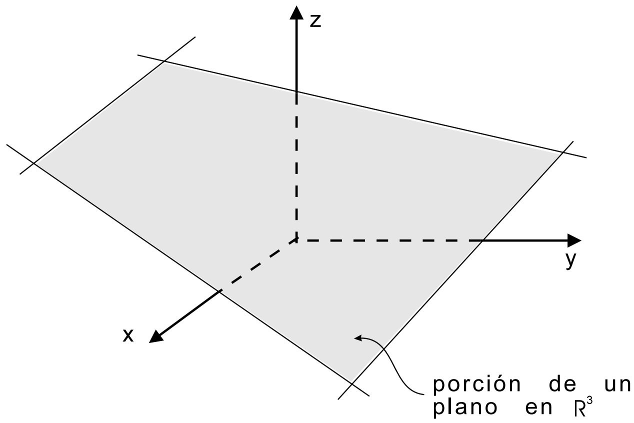


Figura 3.1:

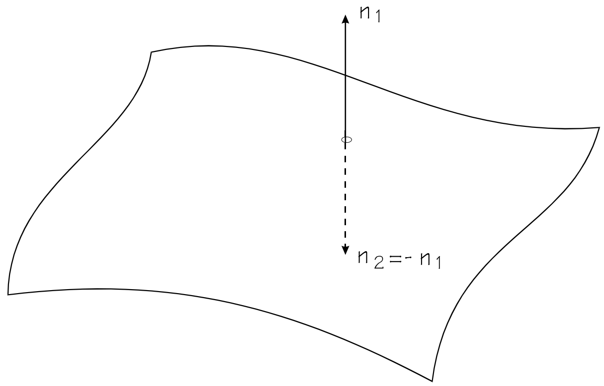


Figura 3.2:

$n(\Phi(u_0, v_0)) = n(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) = \vec{r}$ apuntando hacia afuera desde el lado exterior de $\mathcal{S}$ (que es el que corresponde a nuestra intuición de exterior de $\mathcal{S}$), Φ preserva la orientación. Estudie el caso de la parametrización analítica $\Phi(\theta, \varphi)$ y concluirá que invierte la orientación (Marsden y Tromba- Cálculo Vectorial, 3^a edición).

Nota: En los ejercicios resueltos se aclararán estos conceptos.

(d) *Teorema* 1. Sea $\mathcal{S}$ superficie orientada, Φ_1 y Φ_2 dos parametrizaciones suaves de $\mathcal{S}$ *que preserven la orientación,* sea $F : \mathcal{S} = \Phi(D) \to \mathbb{R}^3,\ \ F \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$, entonces se cumple que $\displaystyle\int_{\Phi_1} F = \int_{\Phi_2} F$.

Ahora, si Φ_1 preserva la orientación y Φ_2 no lo hace, se cumple que $\displaystyle\int_{\Phi_1} F = -\int_{\Phi_2} F$.

Sin embargo, para $f : \Phi(D) = \mathcal{S} \to \mathbb{R},\ \ f \in \mathcal{C}(\mathcal{S}),\ \ \displaystyle\int_{\Phi_1} f = \int_{\Phi_2} f$ sin importar la orientación de $\mathcal{S}$.

Observación: Si $f = 1$ (esto es, $f(x, y, z) = 1,\ \forall\ (x, y, z) \in \mathcal{S}$), se cumple que $\displaystyle\int_{\Phi_1} 1 = \int_{\Phi_2} 1 = A(\mathcal{S})$, lo que implica que el área de $\mathcal{S}$ es independiente de la parametrización usada para $\mathcal{S}$.

(e) *Teorema* 2. Sea $\mathcal{S}$ una superficie suave, orientada y Φ una parametrización que preserva la orientación de $\mathcal{S}$, sea $F : \mathcal{S} = \Phi(D) \to \mathbb{R}^3, \;\; F \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$. Entonces se cumple que

$\displaystyle\int_{\mathcal{S}} F \cdot dS = \int_{\mathcal{S}} F \cdot n \; dS.$

Obsérvese que el primer miembro es $\displaystyle\iint_D F(\Phi(u,v)) \cdot (PVF)$ mientras que el segundo miembro es $\displaystyle\iint_D F(\Phi(u,v)) \cdot \frac{(PVF)}{\|PVF\|}\|PVF\|$, toda vez que el segundo miembro es la integral de superficie del

campo escalar $f = F \cdot n$, es decir de la componente normal de F sobre $\mathcal{S}$.

(f) *Definición* 4. Si F es el campo de velocidad de un fluido, $F(x,y,z)$ apunta en la dirección en la cual el fluido se mueve a través de la superficie $\mathcal{S}$ cerca de (x,y,z). Se define la masa de fluido que fluye a través de $\mathcal{S}$ por unidad de tiempo en dirección n como el flujo del fluido $= \displaystyle\int_{\mathcal{S}} F \cdot dS$ y por el teorema 2, $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} F \cdot dS = \int_{\mathcal{S}} (F \cdot n)$ y esto es por definición de integral de un campo escalar sobre $\mathcal{S} = \displaystyle\iint_D (F \cdot n)(\Phi(u,v))\|(PVF)\|$.

Nota: En los ejercicios, como $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} F{\cdot}n = \iint_D (F{\cdot}n)(\Phi(u,v))\|(PVF)\| = \iint_D f(\Phi(u,v)){\cdot}\frac{(PVF)(\Phi(u,v))}{\|(PVF)\|}\|(PVF)\| = \iint_D F(\Phi(u,v)) \cdot (PVF)(\Phi(u,v)) \quad (*)$. Por lo tanto, ahorraremos un paso, y una vez que conocemos la dirección de n (es decir, sepamos si es n_1 o n_2), pondremos $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} F \cdot dS = \iint_D F(\Phi(u,v)) \cdot {}''(PVF)''(\Phi(u,v))$, en donde "(PVF)" es el (PVF) final del segundo miembro de ($*$) con su signo adecuado.
En los ejercicios resueltos se verá más claro quién es el "PVF."

Una propiedad importante de la integral de un campo vectorial F sobre una superficie $\mathcal{S}$ es que si $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \uplus \mathcal{S}_2, \quad \displaystyle\int_{\mathcal{S}} F = \int_{\mathcal{S}_1} F + \int_{\mathcal{S}_2} F.$

3.2 Ejercicios resueltos

Problema 1
Calcular el flujo total del campo $F; \;\; F(x,y,z) = (-y,x,z)$ a través de la superficie cerrada $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ con $\mathcal{S}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 100, \;\; z \geq 0\}, \;\; \mathcal{S}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0;\; x^2+y^2 \leq 100\}$, en dirección de la normal exterior de $\mathcal{S}$.

Solución
flujo total $= \displaystyle\int_{\mathcal{S}} F \cdot dS = \int_{\mathcal{S}_1} F \cdot n_1 + \int_{\mathcal{S}_2} F \cdot n_2, \quad n_1$ orientado hacia exterior $\mathcal{S}_1, \;_2$ hacia exterior de $\mathcal{S}_2$. Ver fig. 3.3

(Obsérvese que se podría usar la notación $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} F \cdot dS = \iint_{\mathcal{S}_1} F \cdot n_1 \; dS + \iint_{\mathcal{S}_2} F \cdot n_2 \; dS$.)

$\mathcal{S}_1 : z = \sqrt{100-x^2-y^2}, \Phi_1(x,y) = (x,y,\sqrt{100-x^2-y^2}),$

$(T_x \times T_y)_1 = \left(\dfrac{x}{\sqrt{100-x^2-y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{100-x^2-y^2}}, 1\right)$, y este vector *apunta hacia exterior* $\mathcal{S}_1$.

Por lo tanto, $(T_x \times T_y)_1 = {}''(T_x \times T_y)_1''$.

Se obtiene entonces,

$\displaystyle\iint_{\mathcal{S}_1} F \cdot n_1 = \iint_{D_1} (-y,x,\sqrt{100-x^2-y^2}) \cdot {}''\left(\frac{x}{\sqrt{100-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{100-x^2-y^2}}, 1\right)''$, con $D_1 = \mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S}_1 = \{(x,y,0) \mid x^2+y^2 \leq 100\} = \mathcal{S}_2$.

Por lo tanto, $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}_1} F \cdot n_1 = \iint_D \sqrt{100-x^2-y^2} = \int_0^{2\pi}\int_0^{10} \rho\sqrt{100-\rho^2}\; d\rho d\theta = \frac{2000\pi}{3}.$

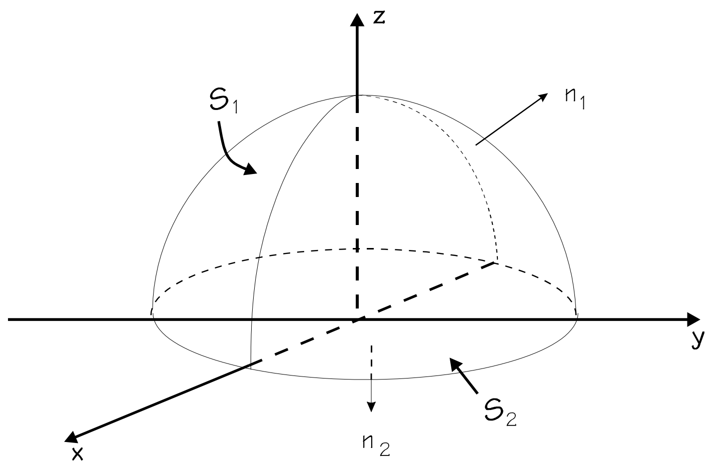


Figura 3.3:

$\mathcal{S}_2 : x^2 + y^2 \leq 100,\ z = 0 = f(x,y),\quad \Phi(x,y) = (x,y,0),\quad (T_x \times T_y)_2 = (0,0,1)$, pero para que *apunte hacia el exterior de* $\mathcal{S}_2$ se coloca $-(T_x \times T_y)_2 = (0,0,-1)$. Este vector es $"(T_x \times T_y)_2"$, por lo que $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}_2} F \cdot n_2 = \int_{D=\mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S}_2} (-y,x,0)\cdot(0,0,-1) = 0.$

Finalmente, el flujo total de $F = \dfrac{2000\pi}{3}$.

Obsérvese que no usamos n_1 ni n_2, ya que en tal caso se tendría $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}_1} F \cdot dS = \iint_{D_1} F(\Phi(x,y)) \cdot \frac{(T_x \times T_y)_1}{\|(T_x \times T_y)_1\|} \|(T_x \times T_y)_1\|$ con $n_1 = \dfrac{(T_x \times T_y)_1}{\|(T_x \times T_y)_1\|}$ con la orientación adecuada; en su lugar, usamos
$F(\Phi(x,y)) \cdot "(T_x \times T_y)_1"$, donde este vector entre comillas sustituye a $n_1\|(T_x \times T_y)_1\|$. Un procedimiento análogo se utiliza para n_2.

Problema 2

Sea $\mathcal{S}$ la superficie dada por $\Phi(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, v);\ 0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 2\pi$. Si el desplazamiento de un fluido viene dado por $F(x,y,z) = (1,1,x^2+y^2)$,
(a) Dibujar la superficie $\mathcal{S}$.
(b) Hallar una expresión para una normal unitaria a $\mathcal{S}$.
(c) Hallar el flujo total de F a través de $\mathcal{S}$, conociendo que ésta, está orientada de manera que n apunte en cada punto de $\mathcal{S}$ hacia el exterior.

Solución

(a) Para $v = 0,\ \Phi(u,0)$ es el segmento de recta que va de $(0,0,0)$ a $(1,0,0)$; $\Phi(u,0) = (u,0,0) = u(1,0,0),\ u \in [0,1]$. Al aumentar v de valor, el segmento de recta gira alrededor del eje z hasta la altura $z = v,\ \ v \in [0,2\pi]$. Se trata, por lo tanto, de una rama del helicoide de la fig 3.4.

(b) $(T_u \times T_v) = (\operatorname{sen} v, -\cos v, u);\ \ n = \dfrac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\operatorname{sen} v, -\cos v, u)$, pero como $v \in [0,2\pi] \Rightarrow n$ apunta hacia el exterior de $\mathcal{S}$, puesto que u es siempre ≥ 0 (la tercera componente).

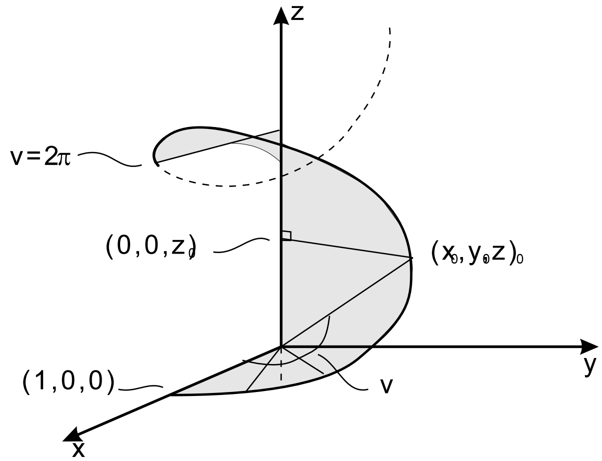


Figura 3.4:

(c) flujo $= \int_{\mathcal{S}} F \cdot n = \iint_{D=\Phi^{-1}(\mathcal{S})} F(\Phi(u,v)) \cdot "T_u \times T_v"$
$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1,1,u^2) \cdot (\operatorname{sen} v, -\cos v, u) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} v - \cos v + u^3) dv du = \frac{\pi}{2}.$
Obsérvese que utilizamos $"T_u \times T_v"$ en lugar de n, pero ya se había determinado que u igual a la tercera componente es $\geq 0 \Rightarrow n$ apunta hacia el exterior.

Problema 3
Se define densidad de flujo promedio de un campo vectorial sobre una superficie $\mathcal{S}$ a (flujo total)/$A(\mathcal{S})$. Hallar la densidad de flujo promedio del campo vectorial $F(x,y,z) = (x-x_0)\vec{i} + \vec{j} + (z-z_0)^2\vec{k}$ a través de toda la esfera dada por $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r_0^2$ en dirección normal exterior a la esfera, con $x_0,\ y_0,\ z_0,\ r_0$ constantes reales > 0.

Solución
Demuestre que con $\Phi(u,v) = (x_0 + r_0(\cos u) \operatorname{sen} v, y_0 + r_0(\operatorname{sen} u) \operatorname{sen} v, z_0 + r_0 \cos v)$ se obtiene
$T_u \times T_v = -r_0^2(\operatorname{sen} v)[(\cos u) \operatorname{sen} v, (\operatorname{sen} u) \operatorname{sen} v, \cos v]$.
Ahora, ya sabemos que esa parametrización invierte la orientación de $\mathcal{S}$, por lo tanto, hemos de tomar $"T_u \times T_v" = r_0^2(\operatorname{sen} v)[(\cos u) \operatorname{sen} v, (\operatorname{sen} u) \operatorname{sen} v, \cos v]$, el cual apunta hacia el exterior de $\mathcal{S}$, puesto que $v \in [0,\pi]$.
En efecto, cuando $v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \operatorname{sen} v \geq 0, \quad \cos v \geq 0$, por lo que la tercera componente
$r_0^2(\operatorname{sen} v)(\cos v) \geq 0$, lo cual corresponde a los puntos del hemisferio norte de $\mathcal{S}$.
Para $v \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \quad \operatorname{sen} v \geq 0, \quad \cos v \leq 0$, lo que implica que la tercera componente $r_0^2(\operatorname{sen} v)(\cos v) \leq 0$ como debe ser en el hemisferio sur de $\mathcal{S}$ (ver fig. 3.5).
La densidad de flujo promedio viene dada por: $= \frac{1}{A(\mathcal{S})} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} G(\Phi(u,v)) \cdot "T_u \times T_v"\ du dv$
$= \frac{1}{4\pi r_0^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (r_0(\cos u) \operatorname{sen} v, 1, r_0^2 \cos^2 v) \cdot r_0^2(\operatorname{sen} v)[(\cos u) \operatorname{sen} v, (\operatorname{sen} u) \operatorname{sen} v, \cos v]\ du dv$
$= \frac{1}{4\pi r_0^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (r_0^3 \underbrace{(\cos^2 u)}_{\frac{1+\cos 2u}{2}} \operatorname{sen}^3 v + \underbrace{r_0^2(\operatorname{sen} u) \operatorname{sen}^2 v}_{0 \text{ respecto de } u} + r_0^4 \operatorname{sen} v \cos^3 v)\ du dv$
$= \frac{r_0}{3}$. Compruebe el resultado usando el hecho de que $\int_0^{2\pi} \cos^k(px) dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^k(px) dx = 0$, con k impar.

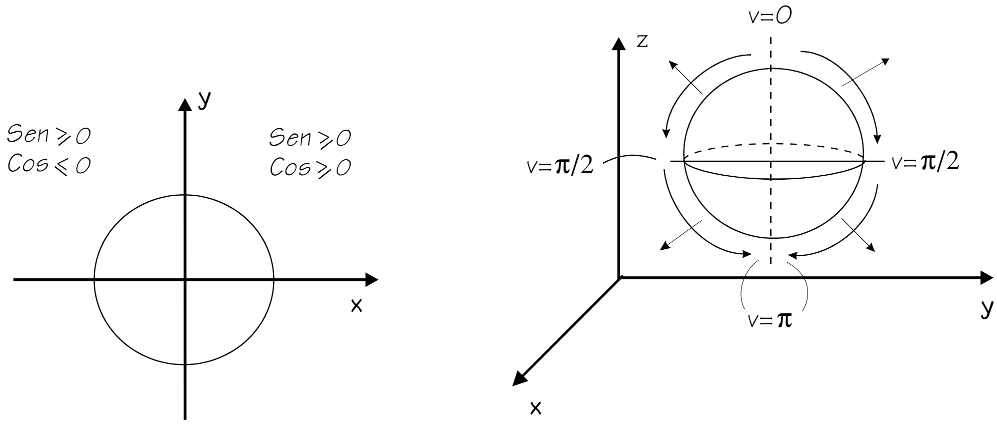


Figura 3.5:

Problema 4
Sea $\mathcal{S}$ la porción de superficie cónica $z^2 = x^2 + y^2, \;\; z \geq 0$, interior al cilindro $z^2 + y^2 = 1$. Sea el campo vectorial $F = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + (2z+1)\vec{k}$. Calcular $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} F \cdot n \; dS$ si la tercera componente de n es negativa. ¿ Cuál es el significado físico del resultado?

Solución
Si utilizamos $z = \sqrt{x^2+y^2}$ para la superficie cónica (ver fig. 3.6) $\mathcal{S} : \Phi(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$ se obtiene $T_x \times T_y = \left(-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$, pero como se dice en el enunciado que la tercera componente de n debe ser negativa, tomamos $"T_x \times T_y" = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$.
Por lo tanto, el flujo de F viene dado por:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} F \cdot n \; dS &= \iint_{D=\mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S}} (2x, 2y, 2\sqrt{x^2+y^2}+1) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right) \\
&= \iint_D \left(\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2\sqrt{x^2+y^2} - 1\right) \\
&= \iint_D \frac{2x^2+2y^2-2x^2-2y^2-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \iint_{D=\mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S}} (-1) = -A(D).
\end{aligned}$$

Ahora, de $z^2 = x^2+y^2; \;\; z^2+y^2 = 1$ se tiene $x^2+2y^2 = 1$ y $\mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S} = \left\{ (x,y,0) \mid x^2 + \dfrac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \leq 1 \right\}$.

Por lo tanto,
$\displaystyle\int_{\mathcal{S}} F \cdot n = -A(D) = -\pi \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$
El signo (-) indica que el flujo de fluido es hacia adentro de la superficie (entra fluido).

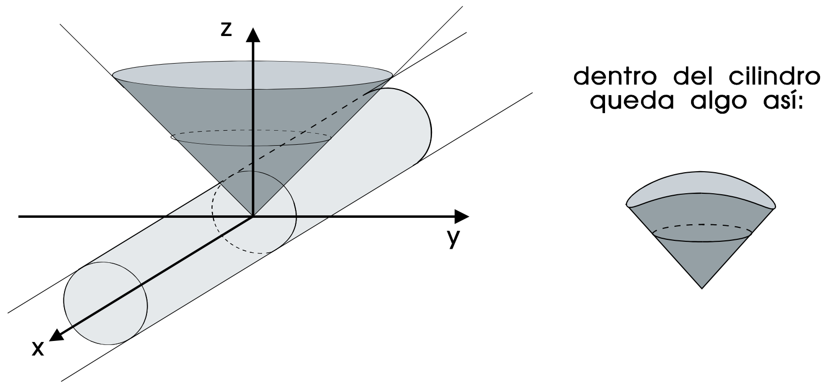


Figura 3.6:

Problema 5
Considere una lata cilíndrica con superficie lateral $\mathcal{S}$ dada por $x^2+y^2=4, \ \ 0 \leq z \leq 8$, sin tapa y sin fondo.
(a) Parametrice $\mathcal{S}$ con una función Φ cuya normal apunta hacia afuera de la lata.
(b) Sea $\vec{V}(x,y,z) = x\vec{i} + x\vec{j} + z^3\vec{k}$ el campo de velocidades de un fluido (con $\|\vec{V}\|$ medida en metros por segundo). ¿ Cuántos m^3 cruzan en un segundo la superficie de la parte (a)?

Solución
(a) $\Phi(\theta,z) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, z), \ \ \theta \in [0,2\pi], \ \ z \in [0,8], \quad T_\theta \times T_z = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0).$
Si se estudian las variaciones de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ según que θ esté en el primer, segundo, tercer o cuarto cuadrante, se concluye que $T_\theta \times T_z$ apunta hacia afuera, lo cual implica que
$n = \dfrac{(T_\theta \times T_z)}{\|T_\theta \times T_z\|} = \dfrac{1}{2}(2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0).$

(b) La masa del fluido viene dada por:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \vec{V}\cdot n &= \iint_D \vec{V}(\Phi(\theta,z)) \cdot \text{"}T_\theta \times T_z\text{"} \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^8 (2\cos\theta, 2\cos\theta, z^3)\cdot(2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0)\, dz d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^8 (2\cos^2\theta + 2(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta)\, dz d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^8 (1+\cos(2\theta) + \operatorname{sen}(2\theta))\, dz d\theta = 32\pi.
\end{aligned}$$

Problema 6
Sea $F(x,y,z) = -y\vec{i} + (z-1)\vec{j} - \vec{k}, \ \ \text{y}$ $\mathcal{S}$ consiste de las cinco caras del cubo $\{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 2; \ 0 \leq y \leq 2; \ 0 \leq z \leq 2\}$ que no están en el plano xy. El vector n apunta en cada cara hacia el exterior de $\mathcal{S}$. Calcular $I = \displaystyle\int_{\mathcal{S}} F.$

Solución
$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^{5} \mathcal{S}_i$ (ver fig. 3.7).

Donde, $\mathcal{S}_1 : cara \;\; ABGF, \;\; D_1 = \text{Proy}_{yz}\mathcal{S}_1 = cara \;\; OCDE.$ Aquí, $x = 2 = f_1(y,z), \;\; \Phi_1(y,z) = (2,y,z), \;\; T_x \times T_y =$

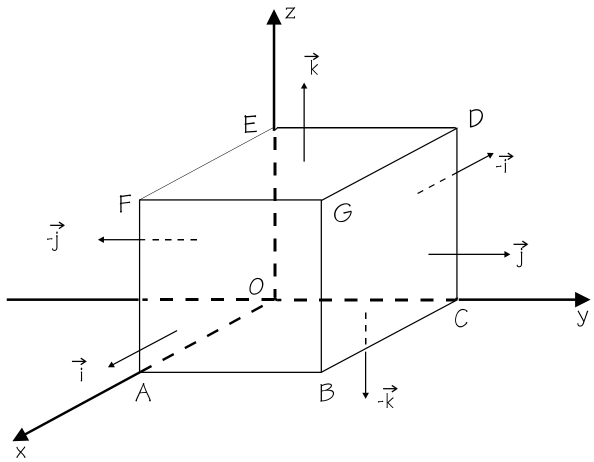


Figura 3.7:

$(1,0,0)$ y se observa que el (PVF) tiene el signo adecuado para apuntar al exterior.

Por lo tanto, $T_x \times T_y = (1,0,0) = \vec{i} = "T_x \times T_y" \Rightarrow I_1 = \int_{\mathcal{S}_1} F = \iint_{\text{cara OCDE}} F(\Phi_1(y,z)) \cdot "T_x \times T_y" = \int_0^2 \int_0^2 (-y, z-1, -1) \cdot (0,0,1) = -4.$

$\mathcal{S}_2 : cara \;\; BCDG, \;\; D_2 = \text{Proy}_{xz}\mathcal{S}_2 = cara \;\; AOEF.$ Aquí, $y = 2 = f_2(x,z), \;\; \Phi_2(x,z) = (x,2,z), \;\; T_x \times T_z = \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial x}, -1, \dfrac{\partial f_2}{\partial z}\right) = (0,-1,0) = -\vec{j}$, pero $"T_x \times T_z" = (0,1,0) = \vec{j} \Rightarrow$

$I_2 = \displaystyle\int_{\mathcal{S}_2} F = \iint_{D_2} F(\Phi_2(x,z)) \cdot \vec{j} = \int_0^2 \int_0^2 (-2, z-1, -1) \cdot \vec{j} = \int_0^2 \int_0^2 (z-1) dxdz = 0.$

$\mathcal{S}_3 : cara \;\; CDEO$, aquí, $x = 0 = f_3(y,z), \;\; \Phi_3(y,z) = (0,y,z), \;\; T_y \times T_z = \left(1, -\dfrac{\partial f_3}{\partial y}, -\dfrac{\partial f_3}{\partial z}\right) = (1,0,0) = \vec{i}$, pero $"T_y \times T_z" = (-1,0,0) = -\vec{i}, \Rightarrow I_3 = \displaystyle\iint_{D_3 = Proy_{yz}\mathcal{S}_3 = D_3} F(\Phi_3(y,z)) \cdot (-\vec{i}) = \int_0^2 \int_0^2 (-y, z-1, -1) \cdot (-\vec{i}) = \int_0^2 \int_0^2 y \; dydz = 4.$

$\mathcal{S}_4 : cara \;\; AOEF, \;\; y = 0 = f_4(x,z), \;\; \Phi_4(x,z) = (x,0,z), \;\; T_x \times T_z = \left(\dfrac{\partial f_4}{\partial x}, -1, \dfrac{\partial f_4}{\partial z}\right) = (0,-1,0) = -\vec{j}$, pero $"T_x \times T_z" = -\vec{j} \Rightarrow I_4 = \displaystyle\int_0^2 \int_0^2 F(\Phi_4(x,z)) \cdot (-\vec{j}) dxdz = \int_0^2 \int_0^2 (0, z-1, -1) \cdot (-\vec{j}) dxdz = \int_0^2 \int_0^2 (1-z) dxdz = 0.$

$\mathcal{S}_5 : cara \;\; FGDE, \;\; z = 2 = f_5(x,y), \;\; \Phi_5(x,y) = (x,y,2), \;\; T_x \times T_y = (0,0,1) = \vec{k}, \;\; "T_x \times T_y" = \vec{k} \Rightarrow I_5 = \displaystyle\int_0^2 \int_0^2 F(\Phi_5(x,y)) \cdot \vec{k} \; dxdy = \int_0^2 \int_0^2 (-y, 1, -1) \cdot \vec{k} = \int_0^2 \int_0^2 (-1) \; dxdy = -4.$

Por lo tanto, $I = -4 + 0 + 4 + 0 - 4 = -4.$

Capítulo 4

Operadores diferenciales.

Objetivos: En este capítulo, el alumno aprenderá a manejar operadores diferenciales muy útiles tanto en Matemática como en Física, Electrónica, Mecánica, Electricidad e incluso hasta en Química (operador ∇^2), etc. Tales operadores son: $\nabla,\ rotF,\ divF,\ Laplacf,\ \nabla^2 F$. También estudiará importantes relaciones con dichos operadores.

4.1 Conceptos básicos

(a) *El operador Nabla.*
Notación: $\nabla =$ operador nabla $=$ operador gradiente $=$ grad.
Sea $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, suponer que existen $\dfrac{\partial f(X)}{\partial x_i}$, con $X = (x_1, x_2, x_3) \in A$, de modo que $X \to f(X) \in \mathbb{R}$.
Se define

$$\begin{cases} \text{grad} f = \nabla f : A \subset \mathbb{R}^3 & \to \quad \mathbb{R}^3 \\ X & \to \quad (\nabla f)(X) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial}{\partial x_2},\ \dfrac{\partial}{\partial x_3}\right)(f(X)) = \left(\dfrac{\partial f(X)}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial f(X)}{\partial x_2},\ \dfrac{\partial f(X)}{\partial x_3}\right) \end{cases}$$

Se escribe $\nabla f(X)$ en lugar de $(\nabla f)(X)$ por comodidad.
De modo que el operador ∇ es un operador vectorial, envía vectores X de $\mathbb{R}^3$ en vectores $\nabla f(X) \in \mathbb{R}^3$. En la práctica, se reemplaza x_1, x_2, x_3 por x, y, z respectivamente.

Además, $\dfrac{\partial}{\partial x} f(X) = \dfrac{\partial f(X)}{\partial x},\ \ \dfrac{\partial}{\partial y} f(X) = \dfrac{\partial f(X)}{\partial y},\ \ \dfrac{\partial}{\partial z} f(X) = \dfrac{\partial f(X)}{\partial z}$.

(b) *Operador rotor.* Es también un operador vectorial.

Notación: rotor $F = rot\ F$, con $\begin{cases} F : B \subset \mathbb{R}^3 & \to \quad \mathbb{R}^3 \\ X & \to \quad F(X) = (f_1(X), f_2(X), f_3(X)) \end{cases}$.

Suponer que existen $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j};\ i = 1,2,3;\ j = 1,2,3$, en $X \in B$.

Se define

$$\begin{cases} rot\ F : B \subset \mathbb{R}^3 & \to \quad \mathbb{R}^3 \\ X & \to \quad (rot\ F)(X) \overset{\text{Notacion}}{=} rot\ F(X) \end{cases}, \text{ con } rot\ F(X) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(X) & Q(X) & R(X) \end{vmatrix},$$

donde x_1, x_2, x_3 se reemplazaron por x, y, z y f_1, f_2, f_3 por P, Q, R, respectivamente.

Por lo tanto,

$$rot\ \ F(X) = \left[\frac{\partial}{\partial y} R(X) - \frac{\partial}{\partial z} Q(X)\right]\vec{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x} R(X) - \frac{\partial}{\partial z} P(X)\right]\vec{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x} Q(X) - \frac{\partial}{\partial y} P(X)\right]\vec{k}.$$

Por comodidad pondremos P en lugar de $P(X)$, Q en lugar de $Q(X)$, etc.

De esta forma, queda

$$rot\ F(X) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Ahora bien, si denotamos $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$, se demuestra que $rot\ F(X) = \nabla \times F(X)$. En efecto,

$\nabla \times F(X) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$, y esto es, por definición, $rot\ F(X)$. (Hemos denotado $\times$ = producto vectorial)

Por lo tanto, destacaremos que $rot\ F(X) = \nabla \times F(X)$.
Por otro lado, el grad$f(X) = (\nabla f)(X) = \nabla f(X)$, lo denotamos así porque efectivamente el grad $f(X)$ es el producto de un vector (el ∇) por un escalar ($f(X)$).
Así que destacamos la fórmula

$$\mathrm{grad} f(X) = \nabla f(X).$$

Teorema 1. *Rotor de un gradiente.*
Si $f \in \mathcal{C}^2(A),\quad f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, el alumno debe saber demostrar que $rot\ (\mathrm{grad} f(X))$, es decir, $\nabla \times (\nabla f(X)) = (0, 0, 0)$.
Pero el teorema debe entenderse en esa forma: si un campo escalar es 2 veces continuamente diferenciable sobre un subconjunto A de $\mathbb{R}^3$, entonces $rot\ (\mathrm{grad} f(X)) = (0, 0, 0)$. (*No como erróneamente se enuncia en algunos libros de ejercicios,* diciendo que el rotor del gradiente de un campo escalar siempre es cero. Obsérvese en la demostración, que se necesita que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, lo cual se cumple si, previamente, se impone la condición de que $f \in \mathcal{C}^2(A)$ para que así se satisfaga el Teroema de Schwarz visto en MA-2112).

Resumiremos el resultado de la siguiente forma:

$$f \in \mathcal{C}^2(A) \Rightarrow \nabla \times (\nabla f(X)) = (0, 0, 0).$$

(c) *El operador divergencia.*
Sea $F : B \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que existan $\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial y}, \dfrac{\partial R}{\partial z}$ en $X \in B$, con $F = (P, Q, R)$.
Se denota divergencia $F(X) = div\ F(X)$, y es un operador escalar definido por:

$$\begin{cases} div\ F : C \subset B \subset \mathbb{R}^3 & \to \quad \mathbb{R} \\ X & \to \quad (div\ F)(X) = div\ F(X) = \dfrac{\partial P(X)}{\partial x} + \dfrac{\partial Q(X)}{\partial y} + \dfrac{\partial R(X)}{\partial z} \end{cases},$$

con $C = \left\{X \in B \ \mid \exists\ \dfrac{\partial P(X)}{\partial x}, \dfrac{\partial Q(X)}{\partial y}, \dfrac{\partial R(X)}{\partial z}\right\}$.
Se demuestra fácilmente que $div\ F(X) = \nabla \cdot F(X)$.
Es claro que la definición se puede simplificar poniendo directamente $div\ F(X) : B \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, pero aclarando que $B = \{X | \text{existen derivadas parciales de } P, Q, R \text{ respecto de } x, y, z\}$ (aunque no es necesario que existan todas las derivadas, por eso la inclusión de $C \subset B$).

Teorema 2. *Divergencia de un rotor.*
Sea $F : B \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $F \in \mathcal{C}^2(B)$, entonces se cumple que $div\ (rot\ F(X)) = \nabla \cdot (\nabla \times F(X)) = 0$ (cero escalar).
La demostración de este teorema es un ejercicio saludable al espíritu.

Algunas notas interesantes: En general, $rot\ F$ está relacionado con rotaciones (ver interpretación física en Marsden y Tromba), y se define F como campo vectorial irrotacional (sin rotaciones) cuando $rot\ F = \nabla \times F = (0, 0, 0)$;

mientras que la divergencia F está relacionada con expansiones (pero ésto depende del campo escalar en cuestión, ya que podría estar relacionada con solenoides). Por ello, un campo vectorial es incompresible (se relaciona a expansiones) o solenoidal (se relaciona con electricidad) si $div\ F = \nabla \cdot F = 0$.

(d) *Operador Laplaciano.*

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ D = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right\}$ (sin embargo, se podría pedir que f fuese dos veces diferenciables). El operador Laplaciano es un *operador escalar* y se denota como Laplaciano $f(X) = Laplac f(X)$, de tal forma que viene definido por:

$$\begin{cases} Laplac\ f : D \subset \mathbb{R}^3 & \to \quad \mathbb{R} \\ X & \to \quad Laplac\ f(X) = \dfrac{\partial^2 f(X)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f(X)}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f(X)}{\partial z^2} \end{cases}$$

Ahora, si se construye el operador escalar $\nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

y se definen $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} f = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, es claro que $Laplac\ f(X) = \nabla^2 f(X)$ y como Ud. puede verificar, $\nabla \cdot \nabla f(X)$, es decir, $div\ (\nabla f(X))$ es igual a $\nabla^2 f(X)$.

Por lo tanto, $Laplac\ f(X) = \nabla^2 f(X) = \nabla \cdot (\nabla f(X)) = div\ (\nabla f(X))$, y como también $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ se puede escribir finalmente:

$$\nabla^2 f(X) = \nabla \cdot (\nabla f(X)) = (\nabla \cdot \nabla)(f(X)).$$

Se dice que una función f *es armónica* si $\nabla^2 f = 0$.

(e) *El campo vectorial* $\nabla^2 F$.

Sea $\begin{cases} F : B \subset \mathbb{R}^3 & \to \quad \mathbb{R}^3 \\ X & \to \quad F(X) = (P(X), Q(X), R(X)) \end{cases}$. Si existen los laplacianos de P, Q, R entonces se puede construir el campo vectorial $\nabla^2 F$ definido por:

$\begin{cases} \nabla^2 F : B & \to \quad \mathbb{R}^3 \\ X & \to \quad \nabla^2 F(X) = (\nabla^2 P(X), \nabla^2 Q(X), \nabla^2 R(X)) \end{cases}$, al cual se le nombra simplemente, como

$\nabla^2 F$ (y no como Laplaciano de F, el cual no existe).
El vector $\nabla^2 F$ juega un papel importante en muchas leyes físicas, como, por ejemplo, las leyes de Maxwell (Ver Marsden y Tromba, tercera edición, páginas $549 - 552$).

Ahora bien, es un ejercicio comprobar que $\nabla^2 F = (\nabla \cdot \nabla) F$, pero $\nabla \cdot (\nabla F)$ no existe.

4.2 Ejercicios resueltos

Problema 1
Demuestre las identidades que se presentan a continuación, con F, G, f, g diferenciables y $a, b \in \mathbb{R}$.
(a) $div\ (aF + bG) = a\ div\ F + b\ div\ G$.
(b) $rot\ (aF + bG) = a\ rot\ F + b\ rot\ G$.
(c) $div\ (F \times G) = G \cdot (rot\ F) - F \cdot (rot\ G)$.
(d) $rot\ (rot\ F) = \nabla(div\ F) - \nabla^2 F$.

Solución
(a) $div\ (aF + bG) = \nabla \cdot (aF + bG)$.
Ahora, si $F = (P_1, Q_1, R_1)$ y $G = (P_2, Q_2, R_2)$, se obtiene que:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(aF+bG) &= \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(aP_1+bP_2,aQ_1+bQ_2,aR_1+bR_2)\\ &= a\frac{\partial P_1}{\partial x}+b\frac{\partial P_2}{\partial x}+a\frac{\partial Q_1}{\partial y}+b\frac{\partial Q_2}{\partial y}+a\frac{\partial R_1}{\partial z}+b\frac{\partial R_2}{\partial z}\\ &= a\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial z}\right)+b\left(\frac{\partial P_2}{\partial x}+\frac{\partial Q_2}{\partial y}+\frac{\partial R_2}{\partial z}\right)=a\;div\;F+b\;div\;G.\end{aligned}$$

(b) $rot\;(aF+bG)=a\;rot\;F+b\;rot\;G$, es decir, queremos probar que:

$$\nabla\times(aP_1+bP_2,aQ_1+bQ_2,aR_1+bR_2)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ aP_1+bP_2 & aQ_1+bQ_2 & aR_1+bR_2\end{vmatrix}=a(\nabla\times F)+b(\nabla\times G).$$

Para ello, se descompone el determinante del primer miembro de la igualdad, de acuerdo a propiedad de los determinantes conocida, en:

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ aP_1 & aQ_1 & aR_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ bP_2 & bQ_2 & bR_2\end{vmatrix}$$

Luego, se desarrollan ambos determinantes y se comparan con el desarrollo de

$a\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P_1 & Q_1 & R_1\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P_2 & Q_2 & R_2\end{vmatrix}$, así se llega a:

$$\begin{aligned}&a\left[\left(\frac{\partial R_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)\vec{k}\right]\\ +\quad &b\left[\left(\frac{\partial R_2}{\partial y}-\frac{\partial Q_2}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P_2}{\partial z}-\frac{\partial R_2}{\partial x}\right)\vec{j}\left(\frac{\partial Q_2}{\partial x}-\frac{\partial P_2}{\partial y}\right)\vec{k}\right],\end{aligned}$$

que también es el desarrollo del segundo miembro.

(c) $div\;(F\times G)=G\cdot(rot\;F)-F\cdot(rot\;G)$.

En efecto, el primer miembro es

$$\nabla\cdot(F\times G)\stackrel{\text{prod. mixto}}{=}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P_1 & Q_1 & R_1\\ P_2 & Q_2 & R_2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\begin{vmatrix}Q_1 & R_1\\ Q_2 & R_2\end{vmatrix}-\frac{\partial}{\partial y}\begin{vmatrix}P_1 & R_1\\ P_2 & R_2\end{vmatrix}+\frac{\partial}{\partial z}\begin{vmatrix}P_1 & Q_1\\ P_2 & Q_2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(Q_1R_2-R_1Q_2)+\frac{\partial}{\partial y}(R_1P_2-P_1R_2)+\frac{\partial}{\partial z}(P_1Q_2-Q_1P_2)$$

$$=R_2\frac{\partial Q_1}{\partial x}+Q_1\frac{\partial R_2}{\partial x}-Q_2\frac{\partial R_1}{\partial x}-R_1\frac{\partial Q_2}{\partial x}+P_2\frac{\partial R_1}{\partial y}+R_1\frac{\partial P_2}{\partial y}-R_2\frac{\partial P_1}{\partial y}$$

$$- P_1\frac{\partial R_2}{\partial y} + Q_2\frac{\partial P_1}{\partial z} + P_1\frac{\partial Q_2}{\partial z} - P_2\frac{\partial Q_1}{\partial z} - Q_1\frac{\partial P_2}{\partial z}.$$

Ahora, el segundo miembro es

$$G\cdot(\nabla\times F) - F\cdot(\nabla\times G) = \begin{vmatrix} P_2 & Q_2 & R_2 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P_1 & Q_1 & R_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P_2 & Q_2 & R_2 \end{vmatrix}$$

, desarrolle esos dos determinantes y compare el resultado con el primer miembro para terminar la prueba.

(d) $rot\ (rot\ F) = \nabla(div\ F) - \nabla^2 F$. Es decir: $\nabla\times(\nabla\times F) = \nabla(\nabla\cdot F) - \nabla^2 F$.
Evaluemos primero

$$\nabla\times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P_1 & Q_1 & R_1 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla\times F) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial R_1}{\partial y} - \dfrac{\partial Q_1}{\partial z} & \dfrac{\partial P_1}{\partial z} - \dfrac{\partial R_1}{\partial x} & \dfrac{\partial Q_1}{\partial x} - \dfrac{\partial P_1}{\partial y} \end{vmatrix} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x}\right)\right]\vec{i} \\
&- \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z}\right)\right]\vec{j} \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z}\right)\right]\vec{k} \\
&= \left(\frac{\partial^2 Q_1}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 R_1}{\partial z\partial x}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 R_1}{\partial z\partial y} + \frac{\partial^2 Q_1}{\partial z^2}\right)\vec{j} \\
&+ \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Q_1}{\partial y\partial z}\right)\vec{k}
\end{aligned}$$

... (I)

Ahora, en el segundo miembro:

$$\begin{aligned}
\nabla(div\ F) - \nabla^2 F &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z}\right) - (\nabla^2 P_1)\vec{i} - (\nabla^2 Q_1)\vec{j} - (\nabla^2 R_1)\vec{k} \\
&= \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 R_1}{\partial x\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 Q_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R_1}{\partial y\partial z}\right)\vec{j} \\
&+ \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2 Q_1}{\partial z\partial y} + \frac{\partial^2 R_1}{\partial z^2}\right)\vec{k} - \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2}\right)\vec{i} \\
&- \left(\frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q_1}{\partial z^2}\right)\vec{j} - \left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R_1}{\partial z^2}\right)\vec{k}
\end{aligned}$$

...(II)

y si se compara (I) con (II) se concluye la prueba.

Problema 2
Hallar $rot\ F(x,y,z)$, con $F(x,y,z) = (e^{xy}, \cos(xy), \cos(xz^2))$.

Solución

$$\begin{aligned}
rot\ F(X) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^{xy} & \cos(xy) & \cos(xz^2) \end{vmatrix} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial y}\cos(xz^2) - \frac{\partial}{\partial z}\cos(xy)\right]\vec{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}\cos(xz^2) - \frac{\partial}{\partial z}e^{xy}\right]\vec{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\cos(xy) - \frac{\partial}{\partial y}e^{xy}\right]\vec{k} \\
&= (0-0)\vec{i} - [-z^2 \text{ sen } (xz^2)]\vec{j} + [-y \text{ sen } (xy) - xe^{xy}]\vec{k} \\
&= [z^2 \text{ sen } (xz^2)]\vec{j} - [y \text{ sen } (xy) + xe^{xy}]\vec{k}.
\end{aligned}$$

Problema 3
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$. Demostrar que $\nabla^2(r^n) = n(n+1)(r^{n-2})$.

Solución

$$\begin{aligned}
\nabla^2 r^n &= \frac{\partial^2 r^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r^n}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial z}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(nr^{n-1}\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(nr^{n-1}\frac{y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(nr^{n-1}\frac{z}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(nr^{n-2}x) + \frac{\partial}{\partial y}(nr^{n-2}y) \\
&+ \frac{\partial}{\partial z}(nr^{n-2}z) \\
&= n(n-2)r^{n-3}\frac{x}{r}x + nr^{n-2} + n(n-2)r^{n-3}\frac{y}{r}y + nr^{n-2} + n(n-2)r^{n-3}\frac{z}{r}z + nr^{n-2} \\
&= 3nr^{n-2} + n(n-2)r^{n-4}(x^2+y^2+z^2) = 3nr^{n-2} + n(n-2)r^{n-4}r^2 \\
&= 3nr^{n-2} + n(n-2)r^{n-2} = (3n + n^2 - 2n)r^{n-2} = n(n+1)r^{n-2},
\end{aligned}$$

como se quería.

Problema 4
Demostrar que si $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ y $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, entonces $\dfrac{\vec{r}}{r^2}$ es irrotacional.

Solución

$$\begin{aligned}
rot\ \left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right) &= rot\ \left(\frac{x}{r^2}\vec{i}+\frac{y}{r^2}\vec{j}+\frac{z}{r^2}\vec{k}\right)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{x}{r^2} & \dfrac{y}{r^2} & \dfrac{z}{r^2} \end{vmatrix} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^2}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^2}\right)\right]\vec{i}-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{r^2}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{r^2}\right)\right]\vec{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^2}\right)\right]\vec{k} \\
&= \left(-z\frac{2r\frac{y}{r}}{r^4}+y\frac{2r\frac{z}{r}}{r^4}\right)\vec{i}-\left(-z\frac{2r\frac{x}{r}}{r^4}+x\frac{2r\frac{z}{r}}{r^4}\right)\vec{j}+\left(-y\frac{2r\frac{x}{r}}{r^4}+x\frac{2r\frac{y}{r}}{r^4}\right)\vec{k} \\
&= \left(-\frac{2yz}{r^4}+\frac{2yz}{r^4}\right)\vec{i}-\left(-\frac{2zx}{r^4}+\frac{2xz}{r^4}\right)\vec{j}+\left(-\frac{2xy}{r^4}+\frac{2xy}{r^4}\right)\vec{k}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}=(0,0,0)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \dfrac{\vec{r}}{r^2}$ *es irrotacional.*

Capítulo 5

Repaso sobre el Teorema de Green. Teorema de Stokes

Objetivos: Aquí se estudiará el importantísimo Teorema de Stokes, el cual es una generalización del Teorema de Green. Existe una versión del Teorema de Stokes para superficies con agujeros (como una porción curva de queso de Gruyère), sin embargo, tal versión no se estudia en este curso.

5.1 Conceptos básicos y teoremas.

Vamos a recordar lo estudiado en MA-2112 sobre este importante teorema. Para ello, necesitamos repasar sobre regiones elementales en $\mathbb{R}^2$.

Tipo I: $D_I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)] \text{ con } \Phi_1,\ \Phi_2 \text{ funciones de } [a,b] \to \mathbb{R},$
$\text{continuas.}\}$

Tipo II: $D_{II} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [\Psi_1(y), \Psi_2(y)],\ y \in [c,d] \text{ con } \Psi_1,\ \Psi_2 \text{ funciones de } [c,d] \to \mathbb{R},\ \text{continuas.}\}$

Tipo III: D_{III} es una región de $\mathbb{R}^2$, la cual se puede descomponer en unión disjunta de regiones Tipo I ó Tipo II.

Definición 1.
Sea D una región tipo III y $\mathcal{C}$ su frontera ($\mathcal{C} = \partial D$), luego $\mathcal{C}$ es una curva cerrada y simple. Ahora bien, $\mathcal{C}$ puede tener una de dos orientaciones: *positiva* (sentido anti-horario) indicado por $\mathcal{C}^+$ o *negativa* (sentido horario) indicada por $\mathcal{C}^-$. Debemos elegir uno de los dos sentidos.

Definición 2.
La orientacón de $\mathcal{C}$ es "positiva" si al imaginar a una persona, caminando a lo largo de $\partial\mathcal{S}$, la superficie $\mathcal{S}$ está siempre a su izquierda y el vector unitario normal n, apunta hacia el mismo lado que la cabeza del caminante.

Teorema 1. *Teorema de Green.*
Supongamos que D es una región tipo III y $\mathcal{C} = \partial D$. Sean P y Q dos funciones escalares de $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1(D)$.
Entonces se cumple que: la integral de línea del campo vectorial $F = P\vec{i} + Q\vec{j}$ sobre $\mathcal{C} = \partial D$ en sentido (+) ($\mathcal{C} =$ curva cerrada, simple) es igual a la integral doble de $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$ sobre D. En símbolos:

$$\int_{\mathcal{C}^+} P\ dx + Q\ dy = \int\!\!\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdots (I)$$

La integral de línea también puede denotarse, en este caso en que $\mathcal{C}$ es cerrada con sentido (+)por:

$$\oint_{\mathcal{C}^+} P\ dx + Q\ dy.$$

También se puede presentar el Teorema de Green en forma vectorial, reemplazando el primer miembro de (I) por una integral de línea con $dS = (dx)\vec{i} + (dy)\vec{j}$ y el segundo miembro por la notación de operadores vectoriales, a saber:

$$\int_{\mathcal{C}^+} F \cdot dS = \iint_D (\nabla \times F) \cdot \vec{k} = \iint_D (rotF) \cdot \vec{k} \cdots (II)$$

Si se pone $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + 0\vec{k}$ y $dS = (dx)\vec{i} + (dy)\vec{j} + 0\vec{k}$, es fácil la demostración de las igualdades (II).

También se puede demostrar una generalización del Teorema de Green para regiones D que no son tipo III, pero que pueden dividirse en subregiones tipo III (Ver por ejemplo, Marsden y Tromba, páginas 494-495).

Hemos repasado el Teorema de Green, el cual relaciona *la integral de línea* de un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$, alrededor de una curva simple cerrada $\mathcal{C} = \partial D$, *con una integral doble* sobre la región encerrada por $\mathcal{C}$, esto es, sobre D.

Ahora estudiaremos el Teorema de Stokes, el cual va a relacionar *la integral de línea* de un campo vectorial alrededor de una curva simple cerrada $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^2$ con la *la integral sobre una superficie* $\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{C} = \partial\mathcal{S}$.

El Teorema de Stokes lo presentaremos en dos versiones: la versión (a), donde $\mathcal{S}$ es la gráfica de una función dada en forma explícita $z = f(x, y)$ (o $x = g(y, z)$ o $y = h(x, z)$) y la versión (b), donde $\mathcal{S}$ no es gráfica de alguna función como las mencionadas.

Versión (a) del Teorema de Stokes.
Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f \in \mathcal{C}^2(D)$;
$\mathcal{S} = graf\ f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y) \text{ para por lo menos algun } (x, y) \in D\}$.

También podría ser $\mathcal{S} = graf\ g\ \ o\ \ \mathcal{S} = graf\ h$ (según señalamos arriba).

Sea: $\begin{cases} \Phi : D \subset \mathbb{R}^2 & \to \quad \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \to \quad \Phi(x, y) = (x, y, f(x, y)) \end{cases}$, Φ una parametrización de $\mathcal{S}$.

Obsérvese que podría ser también $\Phi(y, z) = (g(y, z), y, z))$ o $\Phi(x, z) = (x, h(x, z), z)$.
$\partial\mathcal{S}$ orientada con “orientación inducida por Φ," hacia arriba, lo cual quiere decir que la orientación de $\partial\mathcal{S}$ es positiva (+)si al caminar sobre $\partial\mathcal{S},\ \mathcal{S}$ siempre esté a la izquierda del caminante y la dirección vertical n (vector unitario normal) de $\mathcal{S}$ apunta hacia su cabeza.

Finalmente,

$$\eta : [a, b] \to \partial\mathcal{S} \text{ es una parametrizacion de } \partial\mathcal{S} = \mathcal{C}.$$

$$\sigma : [a, b] \to \partial D \text{ es una parametrizacion de } \partial D$$

siendo η además la composición de Φ o σ (ver dibujo).

Ahora presentaremos formalmente el *Teorema de Stokes versión (a):*

Si $f \in \mathcal{C}^2(D)$ y F es un campo vectorial $\in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ con $\partial\mathcal{S}$ con "orientación inducida por Φ hacia arriba," se cumple que:

$$\oint_{\mathcal{C}=\partial\mathcal{S}} F \cdot d\eta = \int_{\mathcal{S}=graf\ f} (\nabla \times F) \cdot dS$$

El primer miembro puede representarse por: $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}^+=\partial\mathcal{S}} F = \int_{\mathcal{C}} F \cdot d\eta = \oint_{\mathcal{C}^+} P\ dx + Q\ dy + R\ dz$ mientras que el segundo miembro por: $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} (rot\ F) = \int_{\mathcal{S}} (\nabla \times F) \cdot dS = \iint_{D=\text{Proy}_{xy}\mathcal{S}} (rot\ F)_{(\Phi(x,y))} \cdot "T_x \times T_y."$

Pero, si en lugar de $\Phi(x, y)$ se tiene $\Phi(y, z) = (g(y, z), y, z)$ sería

$\displaystyle\int_{\mathcal{S}} rot\ F = \iint_{D=\text{Proy}_{yz}\mathcal{S}} (rot\ F)_{(\Phi(y,z))} \cdot "T_y \times T_z"$, etc (ver fig. 5.1).

Recuérdese que si $z = f(x, y),\ T_x \times T_y = (-f_x, -f_y, 1)$, si $x = g(y, z),\ T_y \times T_z = (1, -g_y, -g_z)$, y si $y = h(x, z),\ T_x \times T_z = (h_x, -1, h_z)$,

Además, $rot\ F(\Phi(x, y)) = \left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)_{(\Phi(x,y))} \vec{i} + \left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\right)_{(\Phi(x,y))} \vec{j} + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)_{(\Phi(x,y))} \vec{k}$ (y podría aparecer $\Phi(y, z)$ o

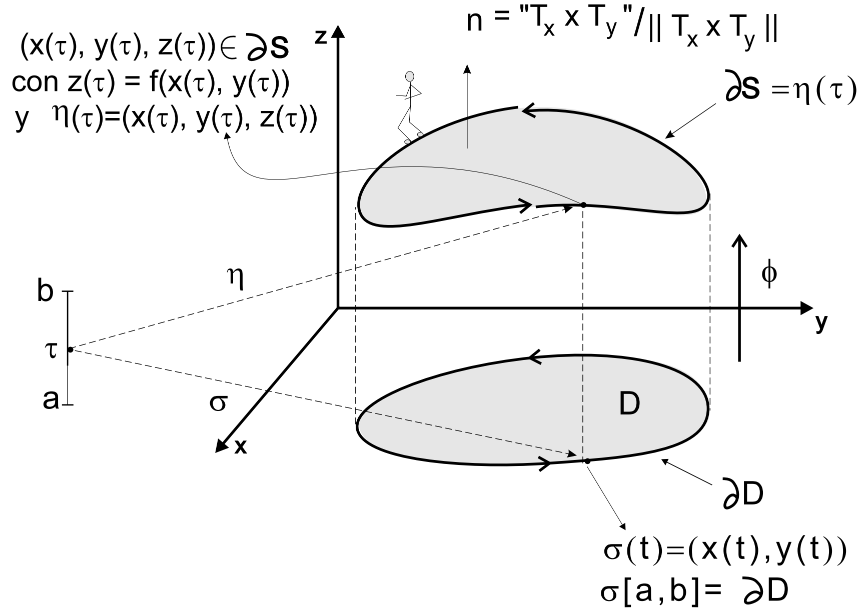


Figura 5.1:

$\Phi(x, z)$ según el caso).

Versión (b) del Teorema de Stokes.
Sea $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie orientada $\mathcal{S}$, $\partial\mathcal{S}$ orientada también y $F : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3$ con las hipótesis siguientes:
(i) Φ es uno a uno.
(ii) $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$

Conclusión:

$$\oint_{\partial\mathcal{S}=\mathcal{C}^+} F \cdot d\eta = \int_{\mathcal{S}} (\nabla \times F) \cdot dS$$

El primer miembro se puede escribir como: $\displaystyle\oint_{\partial\mathcal{S}=\mathcal{C}^+} F \cdot d\eta = \oint_{\mathcal{C}^+} F = \oint_{\mathcal{C}^+} P\ dx + Q\ dy + R\ dz$ y el segundo miembro como: $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} (\nabla \times F) \cdot dS = \int_{\mathcal{S}} (rot\ F) \cdot dS = \iint_{D=\Phi^{-1}(\mathcal{S})} (rot\ F)_{(\Phi(u,v))} \cdot "T_u \times T_v"$

Nota: Recordamos al alumno que debe consultar los textos recomendados por el Profesor de su curso. En particular, en Marsden y Tromba, tercera edición, encontrará en las páginas $509 - 510$, la justificación del por qué se presenta el teorema en dos versiones. Allí se demuestra el teorema en la versión más fácil, que es la (a) y se indican las dificultades para la demostración de la versión (b).

5.2 Ejercicios Resueltos.

Problema 1
Sea D el disco dado por $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 10\}$. $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to F(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, con $P(x, y) = y^2\ e^y - 10;\ Q(x, y) = x\ e^y(2y + y^2) + 5$. Calcular $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}^+=\partial D} F$.

Solución
$\mathcal{C}$ es una curva cerrada y simple igual al borde de D.
D es una región tipo III (puesto que es tipo I y además tipo II, basta con que sea uno de los dos tipos). P, Q son funciones $\in \mathcal{C}^1(D)$ por ser combinaciones de polinomios y exponenciales en $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, en lugar de parametrizar la curva $\mathcal{C} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 10\}$ y calcular la integral de línea dada, utilizaremos el Teorema de Green (del cual hemos verificado sus condiciones).

Así que,

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}^+=\partial D} &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \iint_D [e^y(2y+y^2) - (2ye^y + y^2e^y)] \\ &= \iint_D (2ye^y + y^2e^y - 2ye^y - y^2e^y) = \iint_D 0 = 0.\end{aligned}$$

Si no usamos el Teorema de Green, los cálculos resultan muy largos. En efecto:

Una parametrización de $\mathcal{C}$ podría ser $\sigma(t) = (\sqrt{10}\cos t, \sqrt{10}\operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi]$.

$F(\sigma(t)) = (10\operatorname{sen}^2 t e^{\sqrt{10}\operatorname{sen} t} - 10, 10(\cos t)e^{\sqrt{10}\operatorname{sen} t}(2\sqrt{10}\operatorname{sen} t + 10\operatorname{sen}^2 t) + 5), \quad \sigma'(t) = \sqrt{10}(-\operatorname{sen} t, \cos t)$,

$F(\sigma(t)) \cdot \sigma' = -10\sqrt{10}e^{\sqrt{10}\operatorname{sen} t}\operatorname{sen}^3 t + 10\sqrt{10}\operatorname{sen} t + \sqrt{10}(\cos^2 t)e^{\sqrt{10}\operatorname{sen} t}(2\sqrt{10}\operatorname{sen} t + 10\operatorname{sen}^2 t) + 5\sqrt{10}\cos t$ y calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'$ es una locura.

Problema 2
Sea $D = [0, 2] \times [1, 3] \subset \mathbb{R}^2$, sea además $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = \left(\frac{4}{5}xy^5 + 2y - e^x, 2xy^4 - 4\operatorname{sen} y\right)$. Calcular $\displaystyle\oint_{\partial D^+} F$.

Solución
D es el rectángulo dado por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, \ 1 \leq y \leq 3\}$ para calcular la integral dada, habría que parametrizar cada lado del rectángulo y sumar cuatro integrales de línea.
En su lugar, vamos a ver si se puede aplicar el Teorema de Green: $\mathcal{C} = \partial D$ es una curva cerrada y simple. D es región tipo I y también es tipo II (luego es tipo III), P, Q son combinaciones de polinomios, exponenciales y funciones trigonométricas en $\mathbb{R}^2$, por lo tanto, $\in \mathcal{C}^1(D)$.

Así que,

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}^+=\partial D} F &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \int_0^2 \int_1^3 (2y^4 - 4xy^4 - 2)\, dy dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{2}{5}y^5 - \frac{4}{5}xy^5 - 2y\right)\Bigg|_{y_1=1}^{y_2=3} dx = \int_0^2 \left(\frac{2 \times 3^5}{5} - \frac{4x \times 3^5}{5} - 6 - \frac{2}{5} + \frac{4}{5}x + 2\right) dx \\ &= \int_0^2 \left[\frac{2}{5}(3^5 - 1) + \frac{4x}{5}(1 - 3^5) - \frac{22}{5}\right] dx = \left[\frac{2}{5}(3^5 - 1)x + \frac{2x^2}{5}(1 - 3^5) - \frac{22}{5}x\right]_0^2 \\ &= \frac{4}{5}(3^5 - 1) + \frac{8}{5}(1 - 3^5) - \frac{44}{5} = -\frac{1012}{5}\end{aligned}$$

Problema 3
Como ejercicio, el alumno puede calcular $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}^+=\partial D} F$ como integral de línea y comprobar el resultado anterior.

Solución
Se deja como ejercicio para el alumno.

Problema 4
Calcular mediante el Teorema de Green:

$\oint_{\mathcal{C}^-}(xy+x^2+y)dx+(xy+x-y^2)dy$, con $\mathcal{C}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\right\}$

Solución
$\mathcal{C}$ es una elipse de semiejes a y b, por lo tanto es curva cerrada y simple, $\mathcal{C}=\partial D$ con $D=\left\{(x,y) \mid \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<1\right\}$, así que D es región tipo III. $P(x,y)=xy+x^2+y,\ Q(x,y)=xy+x-y^2$; por lo tanto, P,Q son funciones polinómicas en $\mathbb{R}^2$, luego están en $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)\Rightarrow$ en $\mathcal{C}^1(D)$.
Como $\mathcal{C}$ está recorrida en *sentido horario,* por conocimientos de integrales de líneas vistas en MA-2112 :

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}^-} P\ dx+Q\ dy &= -\oint_{\mathcal{C}^+} P\ dx+Q\ dy \\
\oint_{\mathcal{C}^+=\partial D} P\ dx+Q\ dy &= -\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) \text{ por el Teorema de Green} \\
=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) &= \iint_D (x-y) \overset{\text{Coord. elipticas}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 ab\rho^2(a\cos\theta-b\operatorname{sen}\theta)\ d\rho d\theta \\
&= ab\int_0^{2\pi}(a(\cos\theta)-b(\operatorname{sen}\theta))\left(\int_0^1\rho^2\ d\rho\right)d\theta=0
\end{aligned}$$

Aquí, $x=a\cos\theta,\ y=b\operatorname{sen}\theta,\ \ Abs\ det(Jacobiano)=ab\rho.$

Problema 5
Sean f y g campos escalares: $D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ D$ región cerrada y acotada tipo III y $f,g\in\mathcal{C}^2(D)$. Sea $\mathcal{C}$ curva simple cerrada, frontera de D con sentido (+)

(a) Demuestre que se cumple: $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}^+=\partial D}\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dy=\iint_D(\nabla^2 f).$

(b) Demuestre que se cumple: $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}^+=\partial D}(f)\left(-\frac{\partial g}{\partial y}\,dx+\frac{\partial g}{\partial x}\,dy\right)=\iint_D[(f)(\nabla^2 g)+\nabla f\cdot\nabla g].$

Solución
Se deja como ejercicio para el alumno.

Problema 6
Con las mismas condiciones del ejercicio anterior, demuestre la conocida "*Fórmula de Green:*"

$$\oint_{\mathcal{C}^+}-f\frac{\partial g}{\partial y}dx+f\frac{\partial g}{\partial y}dy=\oint_{\mathcal{C}^+}-g\frac{\partial f}{\partial y}dx+g\frac{\partial f}{\partial x}dy$$

Del problema 6 se deduce también, que si f y g son funciones armónicas sobre D ($\nabla^2 f=0$ y $\nabla^2 g=0$), entonces:
$\displaystyle\oint_{C^+}-f\frac{\partial g}{\partial y}dx+f\frac{\partial g}{\partial x}dy=\oint_{C^+}-g\frac{\partial f}{\partial y}dx+g\frac{\partial f}{\partial x}dy$. (¡Compruébelo!)

Solución
Se deja como ejercicio para el alumno.

Nota: Las fórmulas que aparecen en los Problemas 5 y 6 se presentan frecuentemente en problemas de Física-Matemática.

Problema 7

Sea $\mathcal{S}$ la hoja de superficie dada por $z = 4 - x^2,\ 0 \leq x \leq 2,\ -4 \leq y \leq 4$. La frontera $\partial\mathcal{S}$ tiene "orientación inducida por una parametrización $\Phi(x,y)$ hacia arriba." Sea $F(x,y,z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$. Verifique el Teorema de Stokes.

Solución

(ver fig. 5.2) (a) $z = 4 - x^2 = f(x,y)$, $\quad \mathcal{S} = \text{graf} f$, $\quad D = \text{Proy}_{xy}\mathcal{S}$, $\quad f \in \mathcal{C}^2(D)$, por ser f función polinómica en

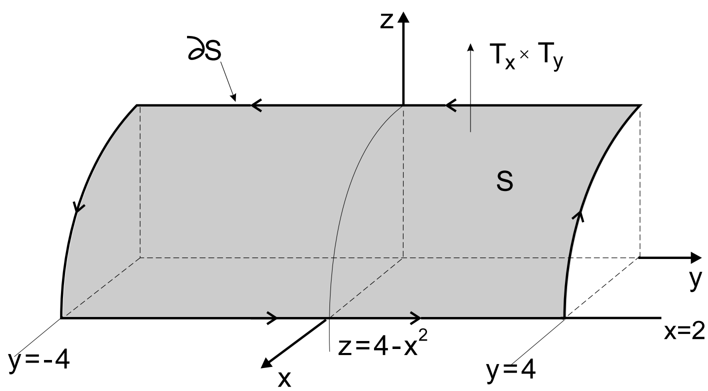


Figura 5.2:

$\mathbb{R}^2$, $\ \Phi(x,y) = (x, y, 4 - x^2)$.

Orientamos $\partial\mathcal{S}$ para que $\mathcal{S}$ quede a la izquierda de un caminante sobre $\partial\mathcal{S}$ (esa es la orientación dada). $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ ya que las componentes de F son funciones polinómicas en $\mathbb{R}^3$, por lo tanto, en $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$.

Aplicando el Teorema de Stokes (versión (a)), queda:

$$\oint_{\mathcal{C}^+ = \partial\mathcal{S}} F = \int_{\mathcal{S}} (rot\ F) = \iint_{D = \text{Proy}_{xy}\mathcal{S}} rot\ F(\Phi(x,y)) \cdot \text{"}T_x \times T_y\text{"}$$

Ahora, $rot\ F(x,y,z) = \nabla \times F = (-y, -z, -x)$ (Compruébelo).

$T_x \times T_y = (-f_x, -f_y, 1) = (2x, 0, 1)$. En este caso la tercera componente del PVF debe ser ≥ 0 (y lo es) por lo que $\text{"}T_x \times T_y\text{"} = (2x, 0, 1)$.

Por lo tanto,

$$rot\ F(x,y,z) \cdot \text{"}T_x \times T_y\text{"} = -(2xy + x) \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}^+} F = \iint_{D = \text{Proy}_{xy}\mathcal{S}} -(2xy + x) = -\int_0^2 \int_{-4}^4 (2xy + x)\ dydx = -16.$$

Como nos pidieron verificar el Teorema de Stokes, tenemos que calcular ahora la integral de línea directamente.

(b) Para el cálculo de la integral de línea tenemos que dividir la curva $\mathcal{C}$ en cuatro curvas:

$\mathcal{C}_1 : \quad x = 2,\ z = 0 \Rightarrow dx = 0,\ \ dz = 0.$

$$I_1 = \int_{\mathcal{C}_1} F(\Phi(2,y)) \cdot (dx, dy, dz) = \int_{\mathcal{C}_1} (2y, 0, 0) \cdot (0, dy, 0) = \int_{\mathcal{C}_1} 2y \times 0 + 0 \times dy + 0 \times 0 = 0.$$

$\mathcal{C}_2 : \quad z = 4 - x^2,\ \ y = 4,\ \ dy = 0,\ dz = -2x\ dx$

$$I_2 = \int_{\mathcal{C}_2} [4x\ dx + x(4 - x^2)(-2x)\ dx] = \int_2^0 (4x - 8x^2 + 2x^4)dx = \frac{8}{15}$$

$\mathcal{C}_3 : \quad x = 0,\ \ z = 4,\ \ dx = 0,\ \ dz = 0$

$$I_3 = \int_{\mathcal{C}_3} F(\Phi(0,y)) \cdot (dx, dy, dz) = \int_{\mathcal{C}_3} 0 = 0.$$

$\mathcal{C}_4 \quad z = 4 - x^2, \;\; y = -4, \;\; dy = 0, \;\; dz = -2x\; dx$

$I_4 = \displaystyle\int_0^2 [(-4x)\; dx - x(4-x^2)(2x)\; dx] = \int_0^2 (-4x - 8x^2 + 2x^4)dx = -\frac{248}{15}$

Finalmente,

$$I = \sum_{i=1}^{4} I_i = -\frac{240}{15} = -16.$$

Problema 8

Usar el Teorema de Stokes para calcular $\displaystyle\oint_{\partial\mathcal{S}}$ con $\mathcal{S}$ la superficie plana cuyo borde es la curva de intersección entre las dos superficies de ecuaciones $z = \sqrt{x^2+y^2}\;;\; z = 2 - x^2 - y^2$, respectivamente.
$\partial\mathcal{S}$ con sentido horario, si se ve desde el origen de coordenadas y $F(x,y,z) = (3+yz)\vec{i} + (4+xz+3x)\vec{j} + (xy+2z)\vec{k}$.

Solución

(ver fig. 5.3) $\; z^2 = x^2+y^2, \; z = 2-x^2-y^2 \Rightarrow z = 2 - z^2 \Rightarrow (z+2)(z-1) = 0, \quad z_1 = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = 1$ en plano

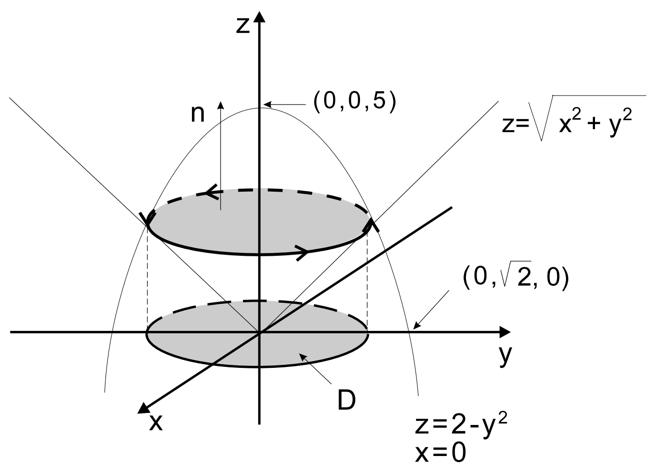


Figura 5.3:

$z = 1, \quad z_2 = -2 < 0$ se desprecia ya que $z = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0.$

Por lo tanto, $z = 1 = f(x,y), \;\; \Phi(x,y) = (x,y,1), \;\; T_x \times T_y = (0,0,1), \quad n = \dfrac{T_x \times T_y}{\|T_x \times T_y\|},$

$"T_x \times T_y" = (0,0,1)$ para que n apunte hacia la cabeza del caminante y S quede a su izquierda.

$rot\; F(x,y,z) = (x-x, y-y, z+3-z) = (0,0,3) \Rightarrow rot\; F(\Phi(x,y)) = (0,0,3)$

Por lo tanto

$\displaystyle\oint_{\partial\mathcal{S}^+} F = \int_{\mathcal{S}} rot\; F = \iint_{D=\text{Proy}_{xy}\mathcal{S}} rot\; F(\Phi(x,y)) \cdot "T_x \times T_y" = \iint_D 3 = 3A(D) = 3\pi \times 1^2 = 3\pi,$ una vez que el alumno verifique las condiciones del Teorema de Stokes.

Nota: Para que $\partial\mathcal{S}$ tenga sentido horario, vista desde el origen de coordenadas, se pone $\partial\mathcal{S}$ con sentido antihorario vista desde arriba de $\mathcal{S}$ (si volteas la página y la miras contra la luz, observarás que vista desde el origen, $\partial\mathcal{S}$ tiene sentido horario).

Problema 9
Calcular $\oint_{\mathcal{C}^+} (e^x + z - 1)dx + (2x - 2z - 3)dy + (5 + 7y + \text{ sen } z)dz$;$\mathcal{C}$ es la curva de intersección del cilindro dado por $x^2 + y^2 = 9$ con el plano de ecuación $2x + 3z = 6$ orientada en sentido anti-horario si se mira desde el punto $(0, 0, 560)$.

Solución
(ver fig. 5.4) $\mathcal{S}$ es la superficie plana de ecuación $z = 2 - \dfrac{2}{3}x$ que está dentro del cilindro.

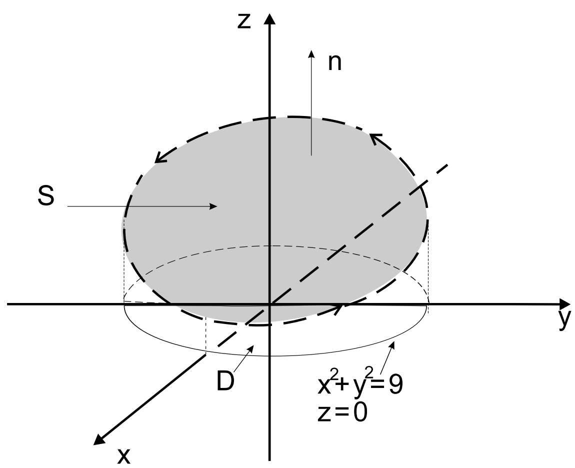


Figura 5.4:

$$\Phi(x,y) = \left(x, y, 2 - \frac{2}{3}x\right), \quad T_x \times T_y = \left(\frac{2}{3}, 0, 1\right) = "T_x \times T_y", \quad rot\ F(x,y,z) = (9,1,2)$$

$\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}^+} F = \int_{\mathcal{S}} rot\ F$ por Teorema de Stokes (verificar condiciones)=

$$\iint_{D=\text{Proy}_{xy}\mathcal{S}} rot\ F(\Phi(x,y)) \cdot "T_x \times T_y" = \iint_D 8 = 8 \iint_D 1 = 8A(D) = 8\pi \times 9 = 72\pi.$$

Problema 10
Dado el cilindro $x^2 + y^2 = a^2,\ (a > 0)$, el plano $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{b} = 1$ y $F(x,y,z) = (xz, z - x, x - y)$. Sea γ la intersección del cilindro con el plano, orientada en sentido anti-horario vista desde el origen. Calcular $\oint_{\gamma^+} F$.

(a) Usando la definicón de integral de linea;

(b) Usando el Teorema de Stokes.

Solución
(ver fig. 5.5) (a) Parametrización de $\gamma :\quad \sigma(\theta) = (a\cos\theta, a \,\text{sen}\,\theta, \underbrace{b(1 - \cos\theta)}_{z=b(1-\frac{x}{a})}) \quad \sigma'(\theta) = (-a\,\text{sen}\,\theta, a\cos\theta, b\,\text{sen}\,\theta),$

$F(\sigma(\theta)) = (a\cos\theta - b + b\cos\theta, b - b\cos\theta - a\cos\theta, a(\cos\theta - \text{ sen}\,\theta)) \Rightarrow$

$F(\sigma(\theta)) \cdot \sigma'(\theta) = -\dfrac{a^2}{2}\,\text{sen}\,(2\theta) + ab(\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta) - ab - \dfrac{a^2}{2}(1 + \cos(2\theta)).$

$\oint_{\gamma^+} F = -\int_0^{2\pi} F(\sigma(\theta)) \cdot \sigma'(\theta) d\theta = \pi a(2b + a).$

Obsérvese cómo se orientó γ para que desde el origen se vea con sentido (+)y esa misma orientación de γ implica

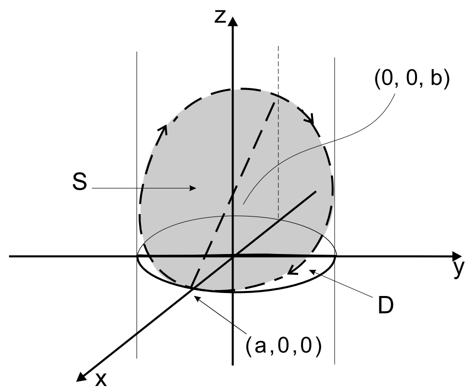


Figura 5.5:

el cambio de signo de la integral entre 0 y 2π.

(b) $F(x,y,z) = (x-z, z-x, x-y), \quad rot\ F(x,y,z) = -(2,2,1),\ z = b\left(1-\dfrac{x}{a}\right) = g(x,y), \quad T_x \times T_y = \left(\dfrac{b}{a}, 0, 1\right)$ Por lo tanto, $"T_x \times T_y" = -\left(\dfrac{b}{a}, 0, 1\right)$ puesto que queremos que n apunte hacia la cabeza del caminante.

Por lo tanto, verificando condiciones del Teorema de Stokes

$$\begin{aligned}
\oint_{\gamma^+ = \partial \mathcal{S}} F &= \int_{\mathcal{S}} rot\ F = -\iint_{D=\text{Proy}_{xy}\mathcal{S}} (2,2,1)\cdot(-)\left(\frac{b}{a}, 0, 1\right) \\
&= \iint_D \frac{2b+a}{a} = \frac{2b+a}{a}\iint_D 1 = \frac{2b+a}{a}A(D) = \frac{2b+a}{a}\pi a^2 \\
&= \pi a(2b+a).
\end{aligned}$$

Problema 11
Sea $\mathcal{C}$ la curva intersección entre las superficies dadas por: $x^2+y^2-4x=0$; $z=z$ y $x^2+y^2+z^2-6x=0;\ z\geq 0.$ Dado $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $F(x,y,z) = (y^2+z^2)\vec{i} + (z^2+x^2)\vec{j} + (y^2+x^2)\vec{k}$. Calcular $\oint_{\mathcal{C}^-} F\cdot d\sigma$ utilizando el Teorema de Stokes, con $\mathcal{C}$ orientada negativamente si se le mira desde el semi-eje z positivo.

Solución
(ver fig. 5.6) $\left\{\begin{array}{lcl} x^2+y^2-4x=0 & , & z=z \\ \Rightarrow (x-2)^2+y^2=4 & , & z=z \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{lcl} x^2+y^2+z^2-6x=0 & ; & z\geq 0 \\ \Rightarrow (x-3)^2+y^2+z^2=9 & ; & z\geq 0 \end{array}\right.$

$z = \sqrt{6x-x^2-y^2} = f(x,y),\ \ \Phi(x,y) = (x, y, \sqrt{6x-x^2-y^2}).$

Se verifican las condiciones del Teorema de Stokes.

$T_x \times T_y = \left(\dfrac{x-3}{\sqrt{6x-x^2-y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{6x-x^2-y^2}}, 1\right) \quad "T_x\times T_y" = -T_x \times T_y$ ya que al recorrer $\partial\mathcal{S} = \mathcal{C}$ en sentido (-) el caminante deja a $\mathcal{S}$ a su derecha visto desde el semi-eje z positivo.

$rot\ F(x,y,z) = 2(y-z, z-x, x-y)$

$$rot\ F(\Phi(x,y))\cdot "T_x\times T_y" = 2\left[(z-y)\frac{x-3}{\sqrt{6x-x^2-y^2}} + (x-z)\frac{y}{\sqrt{6x-x^2-y^2}} - (x-y)\right]$$

Por lo tanto,

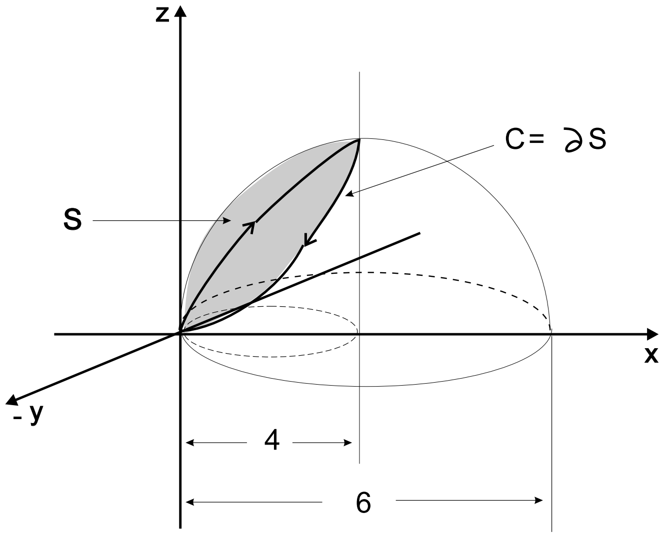


Figura 5.6:

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}^-=\partial\mathcal{S}} F &= \int_{\mathcal{S}} rot\ F = \iint_{D=\text{Proy}_{xy}\mathcal{S}} rot\ F(\Phi(x,y))\cdot \text{"}T_x\times T_y\text{"}\\
&= 2\iint_D\left(\frac{3y}{\sqrt{6x-x^2-y^2}}-3\right) = 6\iint_D \frac{y}{\sqrt{6x-x^2-y^2}} \quad -6\iint_D 1\\
&= 6\int_0^4\int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} \frac{y}{\sqrt{6x-x^2-y^2}}dydx \quad -6A(D)\\
&= 6\int_0^4\left[\frac{2}{3}(6x-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]_{y_1=-\sqrt{4x-x^2}}^{y_2=\sqrt{4x-x^2}} dx \quad -6\pi\times 4\\
&= -2\int_0^4\left[6x-x^2-\left(\sqrt{4x-x^2}\right)^2-\left(6x-x^2-\left(\sqrt{4x-x^2}\right)^2\right)\right]dx \ -24\pi\\
&= -24\pi.
\end{aligned}$$

Problema 12

Un campo vectorial F ; $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ cumple con $\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z} = 2,\ \dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x} = 3,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y} = 4$. Usar Teorema de Stokes para calcular $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}^+} F$, donde la curva cerrada $\mathcal{C}$ viene dada por $\begin{cases} x+y+z &= 1\\ |x|+|y| &= 1\end{cases}$

Solución

$$x+y+z=1 \quad \begin{cases} z=0 & \Rightarrow \quad x+y=1\\ x=0 & \Rightarrow \quad y+z=1\\ y=0 & \Rightarrow \quad x+z=1\end{cases} \qquad |x|+|y|=1 \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 & \text{si} \quad x>0,\ y>0\\ -x-y=1 & \text{si} \quad x<0,\ y<0\\ x-y=1 & \text{si} \quad x>0,\ y<0\\ y-x=1 & \text{si} \quad x<0,\ y>0\end{cases}$$

(ver fig. 5.7) $\mathcal{S} =$ Porción del plano de ecuación $x+y+z=1$ cuya proyección sobre el plano xy es el rectángulo $ABCD$ y $\mathcal{C} = \partial\mathcal{S}$ está marcada en el dibujo y con sentido (+)

Verificar condiciones del Teorema de Stokes.
Por lo tanto,
$z = 1-x-y = f(x,y)$, $\quad T_x\times T_y = (-f_x,-f_y,1) = (1,1,1) = \text{"}T_x\times T_y\text{"}$ según la definición de orientación (+),

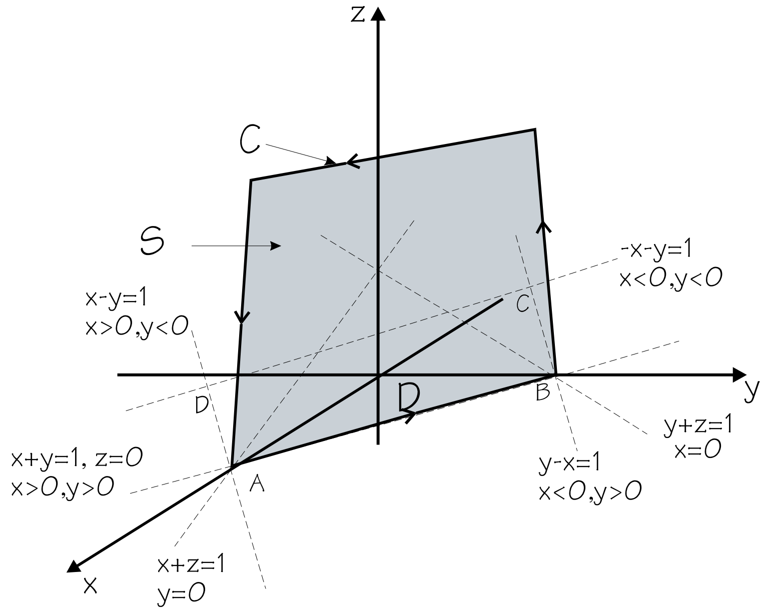


Figura 5.7:

$rot\ F(x,y,z) = (2,3,4)$ si se calcula el $rot\ F$ y se toman en cuenta las igualdades dadas.

$rot\ F(\Phi(x,y)) \cdot "T_x \times T_y" = 9 \Rightarrow$

$\oint_{\mathcal{C}+} F = \int_{\mathcal{S}} rot\ F = \iint_{D=\mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S}} 9 = 9\,A(D) = 9 \times 1 \times 2 = 18$ puesto que D es el rectángulo $ABCD$

con longitud de los lados 1 y 2 respectivamente.

Problema 13

Calcular $\iint_{\mathcal{S}} \vec{\varphi} \cdot dS$ con $\vec{\varphi} = \nabla \times (z^2, x^2, y^2)$ a través de la porción $\mathcal{S}$ de paraboloide de ecuación $z = 2 + x^2 + y^2$, por debajo del plano dado por $2y + z = 10$. Considerar la normal unitaria n de $\mathcal{S}$ con tercera componente negativa. Utilizar el Teorema de Stokes.

Solución

$$\begin{cases} 2y + z &= 10 \\ z &= 2 + x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow 10 - 2y = 2 + x^2 + y^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (y+1)^2 &= 9 \\ z &= 10 - 2y \end{cases}$$

(ver fig. 5.8) Verificar las condiciones del Teorema de Stokes, entonces se tiene:

$\iint_{\mathcal{S}} \vec{\varphi} \cdot dS = \oint_{\partial\mathcal{S}+} F$, con $F(x,y,z) = (z^2, x^2, y^2)$

Borde de $\mathcal{S}$: $x^2 + (y+1)^2 = 9$ en el plano $2y + z = 10$. Parametrizando $\partial\mathcal{S}$ se tiene $x = 3\,\mathrm{sen}\,t,\ y = -1 + 3\cos t,\ z = 12 - 6\cos t$ así la orientación es negativa (-)(si fuera (+) se pondría $x = 3\,\mathrm{sen}\,t,\ y = -1 + 3\cos t,\ z = 10 - 2(-1 + 3\,\mathrm{sen}\,t) = 10 + 2 - 6\,\mathrm{sen}\,t = 12 - 6\,\mathrm{sen}\,t$).

Por lo tanto,

$\sigma(t) = (3\,\mathrm{sen}\,t, -1 + 3\cos t, 12 - 6\cos t),\ \ \sigma'(t) = (3\cos t, -3\,\mathrm{sen}\,t, 6\,\mathrm{sen}\,t)$

$$\begin{aligned} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) &= [(12 - 6\cos t)^2, 9\,\mathrm{sen}^2 t, (-1 + 3\cos t)^2] \cdot (3\cos t, -3\,\mathrm{sen}\,t, 6\,\mathrm{sen}\,t) \\ &= 432\cos t - 144\cos^2 t + 108\cos^3 t - 27\,\mathrm{sen}^3 t + 54(\mathrm{sen}\,t)\cos^2 t - 36(\mathrm{sen}\,t)\cos t + 6\,\mathrm{sen}\,t \end{aligned}$$

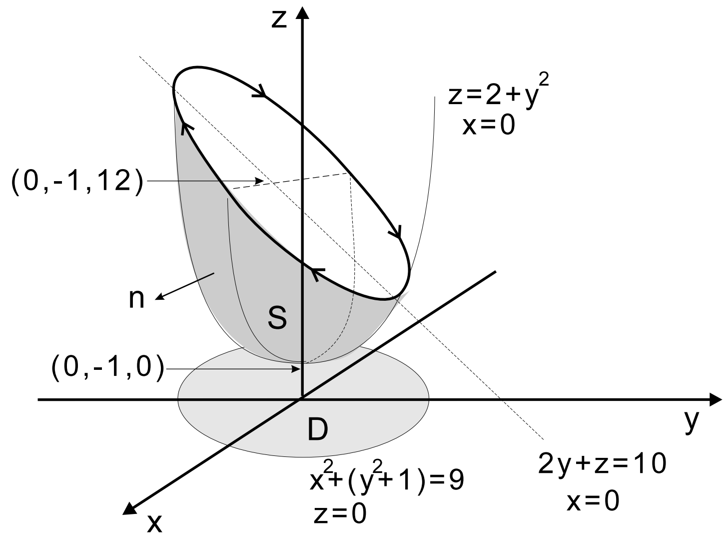


Figura 5.8:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \iint_{\mathcal{S}} \vec{\varphi}\cdot dS &= \underbrace{\int_0^{2\pi} 432\cos t\ dt}_{=0} - \int_0^{2\pi} 72\ dt - \underbrace{\int_0^{2\pi} 72\cos(2t)\ dt}_{=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} 108\cos^3 t\ dt}_{=0} - \underbrace{\int_0^{2\pi} 27\operatorname{sen}^3 t\ dt}_{=0}\\
&+ \int_0^{2\pi} 54(\operatorname{sen} t)\cos^2 t\ dt - 18\underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2t)\ dt}_{=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} 6\operatorname{sen} t\ dt}_{=0}\\
&= \int_0^{2\pi} (-72 + 54(\operatorname{sen} t)\cos^2 t)\ dt = -72\times 2\pi\ - 18(\cos^3 t)_0^{2\pi} = -144\pi.
\end{aligned}$$

Nota: $-144\cos^2 t = -144\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\right) = -72 - 72\cos(2t).$

Recuerde que $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^p(kt)\ dt = \int_0^{2\pi} \cos^p(kt)\ dt = 0$ si p es impar.

Problema 14

Sea $\mathcal{S}$ la porción de elipsoide dada por $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16} = 1$ tal que $x+y \leq 2$. Hallar $\oint_{\mathcal{C}+} F$, con $F(x,y,z) = (x^2+z, y^2, x)$ y siendo $\mathcal{C}$ la intersección entre el elipsoide dado y el plano de ecuación $x+y=2$. (Utilice el Teorema de Stokes).

Solución

Verificar las condiciones del Teorema de Stokes. El plano le saca un tajo al elipsoide (ver fig. 5.9)
Sin embargo $\mathcal{S}$ es la porción de superficie del elipsoide, que queda detrás del plano $x+y=2$ (detrás del tajo).

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}+} F &= \int_{\mathcal{S}} rot\ F = \iint_D rot\ F(\Phi(x,y)) \cdot {}''(PVF)''\\
&= \iint_{D_1=\text{Proy}_{xy}\mathcal{S}_1} F(\Phi_1(x,y)) \cdot {}''(PVF)_1'' + \iint_{D_2=\text{Proy}_{xy}\mathcal{S}_2=D_1} F(\Phi_2(x,y)) \cdot {}''(PVF)_2''
\end{aligned}$$

en donde $\mathcal{S}_1$ es la parte de $\mathcal{S}$ del elipsoide detrás del plano en cuestión y encima del plano xy ,y $\mathcal{S}_2$ es la parte de $\mathcal{S}$ del elipsoide detrás del plano y debajo del plano xy. Sin embargo, los cálculos se simplifican ya que $rot\ F(x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow \int_{\mathcal{S}} rot\ F = \oint_{\mathcal{C}+} F = 0.$

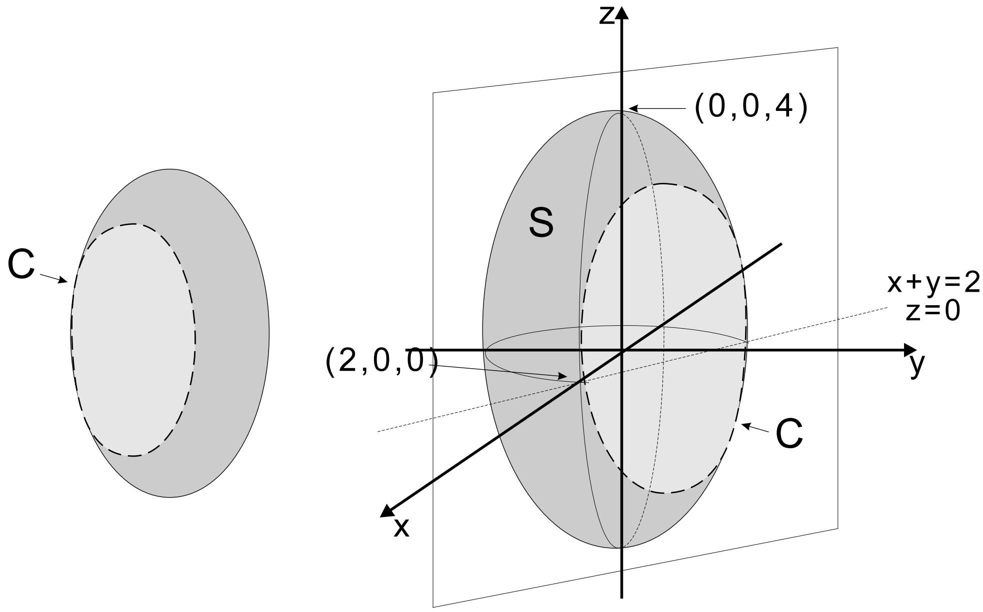


Figura 5.9:

Problema 15

Sea $\mathcal{C}$ la curva intersección entre las curvas dadas por $\begin{cases} x^2+y^2 &= 3z^2,\ z\geq 0 \\ x^2+(y-1)^2 &= 1 \end{cases}$ orientada con sentido contrario al de las agujas de un reloj, si se mira desde el punto $(0,0,10^7)$. Sea $F(x,y,z)=(y,-x,z)$. Usar Teorema de Stokes para calcular $\oint_{\mathcal{C}^+} F$.

Solución

(ver fig. 5.10)   Suponer que verificamos las condiciones del Teorema de Stokes.

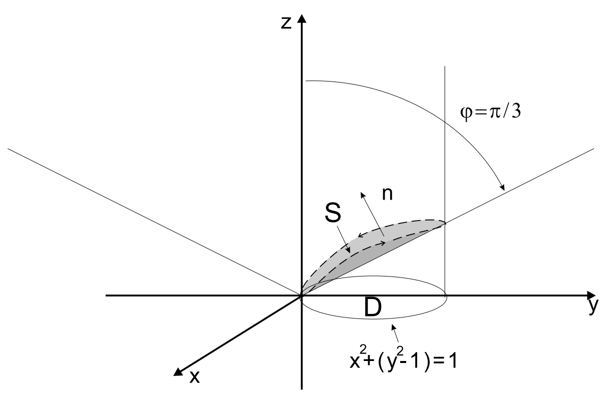


Figura 5.10:

$$3z^2 = x^2+y^2 \Leftrightarrow (\tan^2\varphi)z^2 = x^2+y^2 \Rightarrow \varphi = \text{semi}-\text{angulo conico} = \frac{\pi}{3}.$$

$$z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} = f(x,y),\quad \Phi(x,y)=\left(x,y,\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}\right),\quad T_x\times T_y = \left(\frac{-x}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}},\frac{-y}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}},1\right)\Rightarrow T_x\times T_y = "T_x\times T_y"$$

$rot\ F(x,y,z) = (0,0,-2), \quad rotF\ (\Phi(x,y)) = (0,0,-2), \Rightarrow rotF\ (\Phi(x,y)) \cdot "T_x \times T_y" = -2.$

Por lo tanto,

$$\oint_{\mathcal{C}^+ = \partial \mathcal{S}} F = \int_{\mathcal{S}} rot\ F = \int\int_D (-2) = -2\, A(D) = -2 \times \pi \times 1^2 = -2\pi.$$

Capítulo 6

Campos conservativos

Objetivos: El alumno debe saber demostrar el Teorema de los campos conservativos (o de las equivalencias). Debe entender su significado y saber aplicarlo correctamente.

6.1 Conceptos básicos

En sus clases, debe conocer la importancia de los campos vectoriales que puedan escribirse como un gradiente, es decir: dado $F : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ¿ cuáles son las condiciones para que exista una campo escalar $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla f$?.
La respuesta la tenemos en el siguiente teorema:

Teorema de los campos conservativos.

Sea $F = (P, Q, R) : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F \in \mathcal{C}^1$ y si hay puntos de A en donde $F \notin \mathcal{C}^1(A)$, el conjunto de estos puntos debe ser finito.

Nota muy importante: F puede estar definido de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, pero en tal caso, no puede haber puntos excepcionales, es decir, $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)\ \forall\ X \in \mathbb{R}^2$.

Entonces, las condiciones a continuación "son equivalentes" (lo cual significa que si se cumple alguna de ellas, se cumplen las demás).

(a) $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} F = 0$, para cualquier curva $\mathcal{C}$ cerrada, simple y orientada,

(b) Si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son dos curvas simples orientadas cualesquiera, con los mismos punto inicial y punto final, $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_1} F = \int_{\mathcal{C}_2} F$,

(c) $F = \nabla f$, para alguna $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ (y si existe un número de puntos en donde F no está definida, f tampoco lo estará. En $\mathbb{R}^2$ no puede haber puntos excepcionales),

(d) $rot\ F = \nabla \times F = (0, 0, 0)$ (lo cual significa que F es irrotacional).

Un campo vectorial como el F que satisfaga alguna de las condiciones del teorema se llama *un campo conservativo*.

El Teorema afirma que al cumplirse una de las condiciones se cumplen todas. La demostración consiste en suponer (a) cierta y demostrar que (a) $\Rightarrow$ (b), luego que si (b) es cierta, (b) $\Rightarrow$ (c) y si (c) es cierta, (c) $\Rightarrow$ (d). Finalmente, se demuestra que (d) $\Rightarrow$ (a), con lo cual se cierra el ciclo y queda: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a).

La función f que aparece en (c), en donde $F = \nabla f$, se llama una *una función potencial para* F y al demostrar que (b) $\Rightarrow$ (c) se encuentra que:

$$f(x, y, z) = \int_0^x P(t, 0, 0)\ dt + \int_0^y Q(x, t, 0)\ dt + \int_0^z R(x, y, t)\ dt$$

En el caso $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, si F cumple con alguna de las condiciones del Teorema, entonces :

$$f(x,y) = \int_0^x P(t,0)\ dt + \int_0^y Q(x,t)\ dt$$

Nota: En las hipótesis del Teorema, figura $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ (parte (c)), esta hipótesis es necesaria para la demostración del mismo, sin embargo, en algunos textos no aparece. Es un error, por lo tanto, decir que si $F = \nabla f$ entonces $rot\ F = (0,0,0)$ ((c) $\Rightarrow$ (d)), primero hay que verificar que $f \in \mathcal{C}^2$, en la demostración Ud. verá que sin esa condición no se puede probar que $rot\ F = (0,0,0)$.

6.2 Ejercicios Resueltos

Problema 1
Sea $F(x,y,z) = (3xyz + y^3, x^3z + 3xy, x^2y + 2z)$

(a) ¿Existe función potencial para F ?

(b) En caso afirmativo, encuéntrela.

Solución
(a) Es obvio que $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ ya que sus componentes son funciones polinómicas en $\mathbb{R}^3$. Veamos si (d) $\Rightarrow$ (a) porque entonces sería (d) $\Rightarrow$ (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c), (c) es la que permite encontrar una función potencial f para F.
Ahora, (d) dice que $rot\ F = (0,0,0)$. Por lo tanto, si $rot\ F = (0,0,0)$ habrá función potencial.

$$rot\ F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3xyz + y^3 & x^3z + 3xy & x^2y + 2z \end{vmatrix} = (x^2 - x^3, 3xy - 2xy, 3x^2z + 3y - 3xz + 3y^2) \neq (0,0,0)$$

Por lo tanto F no es irrotacional $\Rightarrow$ no existe función potencial.

Problema 2
Sea $F(x,y,z) = (2xyz + y^2, x^2z + 2xy, x^2y + 2z)$

(a) ¿ Existe función potencial para F ?

(b) En caso afirmativo, encuéntrela.

Solución
(a) $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ es obvio, ahora, $rot\ F(x,y,z) = (x^2 - x^2, 2xy - 2xy, 2xz + 2y - 2xz - 2y) = (0,0,0) \Rightarrow F$ es irrotacional en $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \exists$ función potencial para F.

(b)

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_0^x P(t,0,0)\ dt + \int_0^y Q(x,t,0)\ dt + \int_0^z R(x,y,t)\ dt \\ &= \int_0^x 0\ dt + \int_0^y 2xt\ dt + \int_0^z (x^2y + 2t)\ dt \\ &= 0 + 2x\frac{y^2}{2} + x^2yz + z^2 = xy^2 + x^2yz + z^2 = f(x,y,z) \end{aligned}$$

Si Ud. quiere puede ahora comprobar que $\nabla f = F$. En efecto:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 2xyz = P(x,y,z), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + x^2z = Q(x,y,z), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x^2y + 2z = R(x,y,z).$$

Problema 3

Sea $F(x,y,z) = (2xyz + y^2, x^2z + 2xy, x^2y + 2z)$ el campo vectorial del ejercicio anterior. Calcular $\oint_{\mathcal{C}+} F$, siendo $\mathcal{C}$ la curva intersección entre el plano de ecuación $z = 10$ y la esfera dada por $x^2 + (y-2)^2 + (z-10)^2 = 16$ con orientación de $\mathcal{C}$ positiva.

Solución

La interseción en realidad es el disco $D = \{(x,y,z) \mid x^2 + (y-2)^2 \leq 16,\ \ z = 10\}$

Por lo tanto, $\partial D = \mathcal{C} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (y-2)^2 & = & 16 \\ z & = & 10 \end{cases}$

Pero por el ejercicio 2, $\quad F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ y $rot\ F = (0,0,0)$ y como D es bordeada por $\mathcal{C}$ simple, cerrada (+)y $rot\ F = (0,0,0)$, utilizamos el Teorema de los campos conservativos con (d) ⇒ (a), es decir, si $rot\ F = (0,0,0) \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}+} F = 0.$

Problema 4

Sea $F(x,y,z) = (y, x + z\cos(yz), y\cos(yz))$. Calcular $\int_{\mathcal{C}} F$, $\ \mathcal{C}$ la curva de la figura 6.1 desde el punto $A(1,1,1)$ al punto $D(0,3,7/2)$.

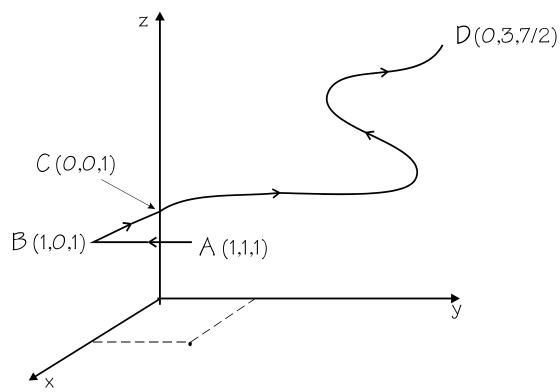


Figura 6.1:

Solución

Antes de ponernos a calcular la integral de línea, vamos a ver si F es conservativo: $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ ya que sus componentes son combinaciones de funciones polinómicas y trigonométricas en $\mathbb{R}^3$.

$rot\ F(x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow F$ es irrotacional $\Rightarrow F$ tiene función potencial f en $Dom\ F = \mathbb{R}^3$.

Hemos usado el teorema de las equivalencias en la forma (d) ⇒ (a) ⇒ (b) ⇒ (c). En un examen, por ejemplo, el alumno debe redactar el Teorema para que se entiendan las implicaciones escritas.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_0^x P(t,0,0)\ dt + \int_0^y Q(x,t,0)\ dt + \int_0^z R(x,y,t)\ dt \\ &= \int_0^x 0\ dt + \int_0^y [x + 0 \times \cos(t \times 0)]\ dt + \int_0^z [y\cos(yt)]\ dt \\ &= 0 + \int_0^y x\ dt + \int_0^z [y\cos(yt)]\ dt = xy + \operatorname{sen}(yz) \end{aligned}$$

Ahora bien, en MA-2112 se explicó un teorema sobre integrales de línea:

Si $F \in \mathcal{C}^1(A)$ y existe $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = F$ entonces conocida $\mathcal{C}$ por sus puntos inicial A y final $D \Rightarrow \int_{\mathcal{C}} \nabla f = f(D) - f(A)$.

Aquí,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} F &= [xy + \text{ sen } (yz)]_{(0,3,7/2)} - [xy + \text{ sen } (yz)]_{(1,1,1)} \\
&= 0 \times 3 + \text{ sen } \left(3 \times \frac{7}{2}\right) - (1 + \text{ sen } (1)) = \text{ sen } \left(\frac{21}{2}\right) - 1 - \text{ sen } (1).
\end{aligned}$$

Problema 5

Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = (y, x + z\cos(yz), y\cos(yz))$. Sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ las curvas de la figura 6.2, con $\mathcal{C}_1$ desde $(0,0,0)$ hasta T según el sentido de las flechas y $\mathcal{C}_2$ desde $(0,0,0)$ hasta T según el sentido de las flechas, siendo $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ curvas suaves.

Demostrar que $\int_{\mathcal{C}_1} F = \int_{\mathcal{C}_2} F$

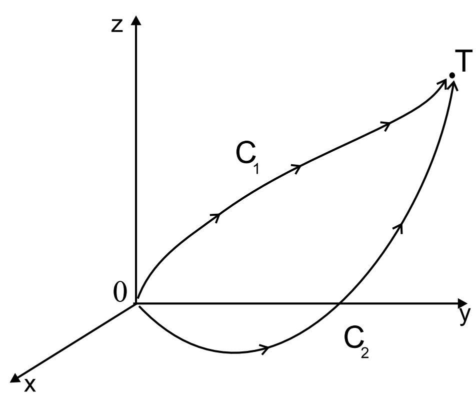


Figura 6.2:

Solución

El campo vectorial F es el mismo del ejercicio anterior, vimos que $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ y que $rot\ F = (0,0,0) \Rightarrow$ (d).
Luego, aplicando el Teorema de los campos conservativos: (d) $\Rightarrow$ (a) $\Rightarrow$ (b). Si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son dos curvas simples orientadas cualesquiera, con los mismos punto inicial y final, entonces $\int_{\mathcal{C}_1} F = \int_{\mathcal{C}_2} F$.

Problema 6

(a) Demostrar que si F es una fuerza que sigue la *ley del cuadrado inverso*, $F(x,y,z) = -L\vec{n}/r^2$ con L constante > 0, $\vec{n} = \vec{r}/r$ y $\vec{r} = (x,y,z), r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, entonces F es un campo conservativo en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.
(b) Hallar una función potencial para F.

Solución

(a) $F(x,y,z) = -\dfrac{L\vec{n}}{r^2} = -\dfrac{L \times (x,y,z)}{r^3}$, así que $P(x,y,z) = -\dfrac{Lx}{r^3}, \quad Q(x,y,z) = -\dfrac{Ly}{r^3}, \quad R(x,y,z) = -\dfrac{Lz}{r^3},$

$$rot\ F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \Rightarrow$$

$rot\ F(x,y,z) = \left(\frac{3Lyz}{r^5} - \frac{3Lyz}{r^5}, \frac{3Lxz}{r^5} - \frac{3Lxz}{r^5}, \frac{3Lxy}{r^5} - \frac{3Lxy}{r^5}\right) = (0,0,0) \Rightarrow F$ es conservativo (al cumplirse (d)).

Por lo tanto, se cumplen todas las condiciones del Teorema de los campos conservativos y podemos construir una función potencial para F.

(b)

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_0^x P(t,0,0)\,dt + \int_0^y Q(x,t,0)\,dt + \int_0^z R(x,y,t)\,dt \\ &= -L\left[\underbrace{\int_0^x t^{-2}\,dt}_{\text{integral impropia}} + \int_0^y t(x^2+t^2)^{-\frac{3}{2}}\,dt + \int_0^z t(x^2+y^2+t^2)^{-\frac{3}{2}}\,dt\right] \end{aligned}$$

Como la primera integral es impropia, recurrimos al artificio siguiente: Demostrar que $\nabla r^n = nr^{n-2}\vec{r} = -r^{-3}\vec{r} \Leftrightarrow n = -1$

Por lo tanto,

$$f(x,y,z) = \frac{L}{r} = \frac{L}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad (x,y,z) \neq (0,0,0).$$

Problema 7

Sea $F(x,y,z) = (2xyz + \operatorname{sen} x, x^2z, x^2y)$

(a) ¿ Existe alguna función f tal que $\nabla f = F$? Justifique teóricamente su respuesta.

(b) En caso afirmativo, hallar f.

Solución

(a) Demuestre que $rot\ F = (0,0,0)$ y aplicar el teorema correspondiente.

(b) Demuestre que $f(x,y,z) = x^2yz - \cos x$.

Problema 8

Sea $F(x,y,z) = (e^x \cos y + yz)\vec{i} + (xz - e^x \operatorname{sen} y)\vec{j} + (xy + z)\vec{k}$

(a) ¿ Es F un campo conservativo ? Justifique.

(b) En caso afirmativo, halle una función φ tal que $F = \nabla\varphi$.

(c) ¿ Existe una función g tal que $F = \nabla g$ y $g(0,0,0) = 0$. Explique.

Solución

$F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ (el alumno debe explicar las razones).

Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema de los campos conservativos.

(a) Demuestre que $rot\ F = (0,0,0)$, luego F es un campo conservativo al cumplirse una de las proposiciones del teorema (en este caso la (d)). Ahora, (d) ⇒ (a) ⇒ (b) ⇒ (c) $\quad \exists\ \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\varphi = F$.

(b) Demuestre que $\varphi(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + \frac{1}{2}z^2$ es una función potencial para F.

(c) Si, puesto que $g(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + \frac{1}{2}z^2 + c$, con $c =$constante arbitraria cumple con $F = \nabla g$.

En efecto,

$\dfrac{\partial g}{\partial x} = e^x \cos y + yz$, $\dfrac{\partial g}{\partial y} = xz - e^x \operatorname{sen} y$ y $\dfrac{\partial g}{\partial z} = xy + z$, pero además $g(0,0,0) = 0 \Leftrightarrow \left(e^x \cos y + xyz + \dfrac{1}{2}z^2\right)_{(0,0,0)} + c = 0 \Leftrightarrow 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1.$

Por lo tanto, $g(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + \dfrac{1}{2}z^2 - 1$ es una función que cumple con lo pedido.

Problema 9

Sea $F(x,y,z) = (y+z)\vec{i} + (z+x)\vec{j} + (x+y+z)\vec{k}$ un campo vectorial de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $\mathcal{C}$ una curva simple, suave que va desde $(0,0,0)$ a (1,1,1). Calcular $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\sigma.$

(Ejercicio propuesto en guía de ejercicios de MA-2113 elaborado por los preparadores Abril-Julio 1995.)

Solución

Como no conocemos la curva $\mathcal{C}$, pensemos un campo conservativo y el teorema correspondiente.

$F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ por ser sus componentes funciones polinómicas en $\mathbb{R}^3$.

$rot\ F(x,y,z) = (0,0,0)$ (Compruébelo) $\Rightarrow$ F es irrotacional $\Rightarrow$ parte (d) del Teorema de campos conservativos $\Rightarrow F = \nabla f$ para alguna $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ (parte (c)).

Vamos a hallar una función potencial f de F:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_0^x P(t,0,0)\ dt + \int_0^y Q(x,t,0)\ dt + \int_0^z R(x,y,t)\ dt \\ &= \int_0^x 0\ dt + \int_0^y x\ dt + \int_0^z (x+y+t)\ dt = xy + xz + yz + \frac{z^2}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} F \cdot d\sigma = f(1,1,1) - f(0,0,0) = 3 + \frac{1}{2} - 0 = \frac{7}{2}$$

Explicar la propiedad usada.

Capítulo 7

Teorema de Gauss (o Teorema de la Divergencia)

Objetivos: Aquí, el alumno debe demostrar el Teorema de Gauss y saber aplicarlo. También debe entender el Teorema de Gauss sobre un sólido cerrado y acotado, con un hueco en su interior (Ley de Gauss). En relación al último teorema mencionado, éste se puede usar para demostrar que el campo eléctrico debido a una carga Q que se esparce de manera uniforme sobre la superficie de una esfera, es el mismo en el exterior de la superficie, que el campo desde la carga puntual Q situada en el centro de la esfera.

7.1 Conceptos básicos

Necesitamos recordar primero la clasificación de regiones Ω de $\mathbb{R}^3$, siendo Ω un sólido cerrado y acotado.

Ω *es tipo I*: si $D = \text{Proy}_{xy}\Omega$ es tipo I ó II en $\mathbb{R}^2$ y las z cumplen con $\gamma_1(x,y) \leq z \leq \gamma_2(x,y)$ siendo $\gamma_i : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad i = 1,2$ funciones continuas.

Ahora, $D = \text{Proy}_{xy}\Omega$ es tipo I si es $\{(x,y) \mid x \in [a,b],\ y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)] \text{ con } \varphi_i : [a,b] \overset{\text{continuas}}{\rightarrow} \mathbb{R}, \quad i = 1,2\}$

$D = \text{Proy}_{xy}\Omega$ es tipo II: si es $\{(x,y) \mid x \in [\psi_1(y), \psi_2(y)],\ y \in [c,d] \text{con } \psi_i : [c,d] \overset{continuas}{\rightarrow} \mathbb{R}, \quad i = 1,2\}$

Ω *es tipo II*: si $D = \text{Proy}_{yz}\Omega$ es tipo I ó II en $\mathbb{R}^2$ y las x cumplen con $\alpha_1(y,z) \leq x \leq \alpha_2(y,z)$ siendo $\alpha_i : D \subset \mathbb{R}^2 \overset{\text{continuas}}{\rightarrow} \mathbb{R}, \quad i = 1,2$

Ω *es tipo III*: si $D = \text{Proy}_{xz}\Omega$ es tipo I ó II en $\mathbb{R}^2$ y las y cumplen con $\beta_1(x,z) \leq y \leq \beta_2(x,z)$ siendo $\beta_i : D \subset \mathbb{R}^2 \overset{\text{continuas}}{\rightarrow} \mathbb{R}, \quad i = 1,2$

Ω *es tipo IV*: si Ω es tipo I, II ó III.

El Teorema de la divergencia relaciona una integral de superficie de un campo vectorial F dado sobre $\partial\Omega$, con Ω tipo IV; con una integral triple de la divergencia de F sobre Ω. De otra forma: el Teorema afirma que el flujo de un campo vectorial F fuera de la superficie cerrada $\partial\Omega$ es igual a la integral triple de la $div\ F$ sobre Ω.

Ahora bien, $\partial\Omega$ superficie cerrada (tipo IV) de un sólido cerrado y acotado en $\mathbb{R}^3$, Ω, puede orientarse de dos maneras:
(a) *Orientación exterior,* en la cual la normal exterior a $\partial\Omega$ apunta hacia afuera, es decir, hacia el espacio.
(b) *Orientación interior,* en la cual la normal será hacia dentro de Ω (ver fig. 7.1).

Ahora bien, si $\mathcal{S} = \partial\Omega$ tiene orientación exterior, podemos decir que $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} F$ está midiendo el flujo de F hacia el exterior, a través de $\mathcal{S}$. Si, por el contrario, $\mathcal{S} = \partial\Omega$ tiene orientación interior, $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} F$ mide el flujo de F hacia el interior

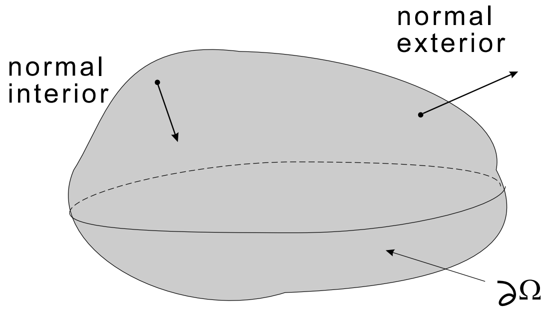


Figura 7.1:

de Ω, a través de $\mathcal{S} = \partial\Omega$.

Teorema de Gauss (o Teorema de la divergencia)

Sea $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F$ suave y Ω una región tipo IV acotada por $\mathcal{S} = \partial\Omega$, la cual es una superficie cerrada y orientada. Entonces se cumple que:

$$\int_\Omega (\nabla \cdot F)\, dV = \int_{\mathcal{S}=\partial\Omega} F \cdot dS$$

Vamos a analizar la notación en el resultado final del Teorema de Gauss.

Primer miembro: $\displaystyle\int_\Omega (\nabla \cdot F)\, dV = \iiint_\Omega (div\ F)\, dV$ o simplemente $\displaystyle\iiint_\Omega div\ F$

Segundo miembro: $\displaystyle\int_{\mathcal{S}=\partial\Omega} F \cdot dS$ es la integral de superficie del campo vectorial F, y se puede escribir como $\displaystyle\int_{\mathcal{S}=\partial\Omega} F \cdot dS = \iint_{D=\Phi^{-1}(\mathcal{S})} F(\Phi(u,v)) \cdot \text{"}T_u \times T_v\text{"}$ notación $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} F$.

De modo que en los ejercicios presentaremos el Teorema de Gauss como:

$$\iiint_\Omega div\ F = \int_{\mathcal{S}} F \cdot dS$$

con $F = (P, Q, R)$ y $div\ F = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$

Teorema: Ley de Gauss.

Se tiene un sólido M tipo IV en $\mathbb{R}^3$, sea $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ y $\|\vec{r}\| = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Entonces se cumple que si $(0,0,0) \notin \partial M \Rightarrow \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^3} dS = \begin{cases} 4\pi & \text{si} \quad (0,0,0) \in M \\ 0 & \text{si} \quad (0,0,0) \notin M \end{cases}$

Este teorema se conoce vulgarmente como *Teorema de Gauss sobre un sólido cerrado y acotado con un hueco en su interior.*

7.2 Ejercicios Resueltos

Problema 1

Sea Ω la región de $\mathbb{R}^3$ acotada por la semi-esfera dada por $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16, \quad 2 \le z \le 6$, y $F(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + (z-2)\vec{k}, \ \partial\Omega$ orientada con normal exterior. Verificar el Teorema de la divergencia.

Solución

F es suave puesto que sus componentes son funciones polinómicas en $\mathbb{R}^3$. $\quad\Omega$ es una región tipo I y tipo II, $\Rightarrow$ es tipo IV en $\mathbb{R}^3$, acotada por $\partial\Omega = \mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ con $\mathcal{S}_1$ la superficie de la semi-esfera y $\mathcal{S}_2$ el disco

$\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 16,\;\; z=2\}$ (ver fig. 7.2)

Además $\mathcal{S}$ está orientada con la normal exterior, por lo tanto, se cumplen las condiciones del teorema y

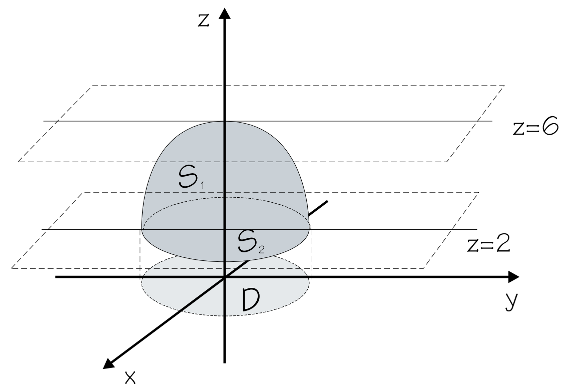


Figura 7.2:

$$\iiint_\Omega div\ F = \int_{\mathcal{S}} F\cdot dS, \quad div\ F(x,y,z) = 1+1+1 = 3$$

Primero evaluamos

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\iiint_\Omega div\ F & = & \displaystyle\iiint_\Omega 3 = 3\iiint_\Omega 1 = 3\,\text{Volumen de }\Omega \qquad (\text{MA}-2112)\\ \Rightarrow & & \displaystyle\iiint_\Omega div\ F = 3\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times 4^3 = 128\pi\end{array}$$

Ahora resta evaluar $\displaystyle\int_{\mathcal{S}=\mathcal{S}_\cup\mathcal{S}_2} F\cdot dS$ y comprobar que da 128π.

A tal efecto, parametrizamos $\mathcal{S}_1$ por

$\Phi_1(x,y) = (x,y,2+\sqrt{16-x^2-y^2}),\;\; (T_x\times T_y)_1 = (-z_x,-z_y,1) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{16-x^2-y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{16-x^2-y^2}},1\right)$ y para que apunte hacia el exterior debe ser $("T_x\times T_y")_1 = \left(\dfrac{x}{\sqrt{16-x^2-y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{16-x^2-y^2}},1\right)$,

$$\begin{array}{rcl}F(\Phi_1(x,y))\cdot("T_x\times T_y")_1 & = & \dfrac{x^2}{\sqrt{16-x^2-y^2}}+\dfrac{y^2}{\sqrt{16-x^2-y^2}}+\sqrt{16-x^2-y^2}\\ & = & \dfrac{x^2+y^2+16-x^2-y^2}{\sqrt{16-x^2-y^2}} = \dfrac{16}{\sqrt{16-x^2-y^2}}\end{array}$$

Así que

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\int_{\mathcal{S}_1} F\cdot dS & = & \displaystyle\iint_{D_1=\text{Proy}_{xy}\mathcal{S}_1} F(\Phi_1(x,y))\cdot("T_x\times T_y")_1 = \iint_{D_1}\frac{16}{\sqrt{16-x^2-y^2}}\\ & \overset{\text{Coord. polares}}{=} & \displaystyle 16\int_0^{2\pi}\int_0^4\frac{\rho}{\sqrt{16-\rho^2}}\,d\rho d\theta = 16\times 2\pi\times(-\sqrt{16-\rho^2})_0^4\\ & = & 128\pi.\end{array}$$

Ahora, para $\mathcal{S}_2$: $\quad z=2, \quad x^2+y^2\leq 16, \quad \Phi_2(x,y)=(x,y,2), \quad (T_x\times T_y)_2 = (0,0,1) \Rightarrow "(T_x\times T_y)_2" = (0,0,-1)$ para que apunte al exterior.

$$F(\Phi_2)\cdot"(T_x\times T_y)_2" = (x,y,0)\cdot(0,0,-1) = 0 \Rightarrow \int_{\mathcal{S}_2} F\cdot dS = \int_{D_2=D_1} 0 = 0$$

Por lo tanto, $\displaystyle\int_{\mathcal{S}=\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2} F\cdot dS = 128\pi + 0 = 128\pi.$

Hemos demostrado que $\displaystyle\iiint_{\Omega} div\ F = 128\pi$ y $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} F \cdot dS = 128\pi.$

Problema 2

Sea $F(x,y,z) = xy\vec{i} + y^2z\vec{j} + z^3\vec{k}$. Calcular $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} (F \cdot n) dS$, con $\mathcal{S}$ la superficie del cubo dado por $0 \le x \le 3,\ \ 0 \le y \le 3,\ \ 0 \le z \le 3.$

(Sugerencia: Utilizar el Teorema de Gauss).

Solución

Antes que nada, el alumno debe verificar las condiciones del Teorema de Gauss.
Cumplido tal requisito, pasamos a observar que si no utilizamos el Teorema de Gauss, habría que calcular seis integrales de superficies (una por cada cara del cubo).
Ahora, $div\ F = y + 2yz + 3z^2$ y por el teorema en cuestión:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} (F \cdot n) dS &= \int_{\partial\Omega} F \cdot dS = \iiint_{\Omega} div\ F = \int_0^3 \int_0^3 \int_0^3 (y + 2yz + 3z^2)\ dzdydx \\
&= \int_0^3 \int_0^3 \left(yz + yz^2 + z^3\right)_{z_1=0}^{z_2=3} dydx = \int_0^3 \int_0^3 (3y + 9y + 27)\ dydx \\
&= \int_0^3 \left(6y^2 + 27y\right)_{y_1=0}^{y_2=3} dx = 135 \int_0^3 dx = 405.
\end{aligned}$$

Problema 3

Sea Ω el sólido acotado de la figura 7.3, con $\partial\Omega$ una superficie cerrada orientada hacia el exterior de Ω. Suponer que la proyección de Ω sobre el plano xy (Notación $\mathrm{Proy}_{xy}\Omega$) es de tipo II en $\mathbb{R}^2$. Sea F un campo vectorial, $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $F = (P,Q,R)$. Demuestre que $\displaystyle\int_{\partial\Omega} R\vec{k} \cdot \vec{n} = \int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}$ (Es decir: $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} R(\vec{k} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)$)

Se sabe que las caras laterales de Ω formarán parte de planos paralelos a los planos xz y yz, repectivamente.

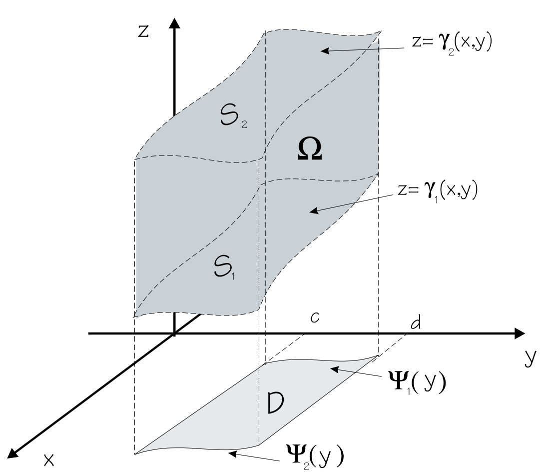


Figura 7.3:

Además, $\gamma_1(x,y) \le z \le \gamma_2(x,y)$ (ver figura).

Nota: Este ejercicio se coloca en el capítulo correspondiente al Teorema de Gauss, por ser parte de la demostración del mismo.

Solución
Designemos $\mathcal{S}_2 =$ cara superior de Ω, $\mathcal{S}_1 =$ cara inferior y $\mathcal{S}_i$, $i = 3,4,5,6$ las caras laterales. Por lo tanto,
$\iint_{\partial\Omega} R\vec{k}\cdot\vec{n} = \iint_{\partial\Omega} R\vec{k}\cdot\vec{n}_2 + \iint_{\partial\Omega} R\vec{k}\cdot\vec{n}_1$ (puesto que $\vec{k}\cdot\vec{n}_i = 0$, $i = 3,4,5,6.$) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial\Omega} R\vec{k}\cdot\vec{n} &= \iint_{D_2=\mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S}_2=\mathrm{Proy}_{xy}\Omega} R[x,y,\gamma_2(x,y)](0,0,1)\cdot \text{"}\left(-\frac{\partial\gamma_2}{\partial x},-\frac{\partial\gamma_2}{\partial y},1\right)\text{"}\\
&+ \iint_{D_1=\mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S}_1=\mathrm{Proy}_{xy}\Omega} R[x,y,\gamma_1(x,y)](0,0,1)\cdot \text{"}\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x},\frac{\partial\gamma_1}{\partial y},-1\right)\text{"}\\
&= \iint_{\mathrm{Proy}_{xy}\Omega} \left(R[x,y,\gamma_2(x,y)] - R[x,y,\gamma_1(x,y)]\right)\,dxdy
\end{aligned}$$

por ser por hipótesis $\mathrm{Proy}_{xy}\Omega$ tipo II en $\mathbb{R}^2$.

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} &= \int_{\mathrm{Proy}_{xy}\Omega}\left[\iint_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\,dz\right]dxdy\\
&= \iint_{\mathrm{Proy}_{xy}\Omega} \left(R[x,y,\gamma_2(x,y)] - R[x,y,\gamma_1(x,y)]\right)\,dxdy
\end{aligned},$$

con lo cual se concluye la demostración. Sólo resta observar que hemos usado, según la notación acordada en este libro: "$T_x \times T_y$" reemplazando a $\vec{n}\|T_x\times T_y\| = \dfrac{T_x\times T_y}{\|T_x\times T_y\|}\|T_x\times T_y\|$ en donde las comillas indican que se ha tomado la orientación adecuada.

Problema 4
Sea Ω el sólido interior al cilindro de ecuación $x^2+y^2 = a^2$, entre los planos dados por $z = 0$, $y - z + 2a = 0$ respectivamente. Suponer que $\partial\Omega$ está orientada hacia el exterior de Ω. Sea $F(x,y,z) = (x^2, -y - ze^x, 3z - xe^y)$, usar el Teorema de Gauss para calcular $\displaystyle\int_{\partial\Omega} F\cdot dS$.

Solución
$F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ puesto que sus componentes son combinaciones de polinomios y exponenciales en $\mathbb{R}^3$ (ver fig. 7.4).

Ω es obviamente región tipo IV, suave, acotada por $\partial\Omega = \mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2\cup\mathcal{S}_3$, superficie cerrada y orientada. Por lo tanto, se cumple el Teorema de Gauss:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} F\cdot dS &= \iiint_{\Omega} div\ F = \iiint_{\Omega}(2x+2)\\
&= 2\iint_{D=\mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S}_1}\left[\int_0^{y+2a}(x+1)\,dz\right]dydx = 2\iint_D (xy+2ax+y+2a)\,dydx\\
&= 2\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} xy\ dydx + 4a\underbrace{\iint_D x\ dydx}_{=0} + 2\underbrace{\iint_D y\ dydx}_{=0} + 4a\iint_D dydx
\end{aligned}$$

La segunda y tercera integral deben ser nulas puesto que si se recuerda, de MA-2112, las coordenadas x_c, y_c del centroide de D son $x_c = \dfrac{1}{A(D)}\displaystyle\iint_D x$, $\quad y_c = \dfrac{1}{A(D)}\displaystyle\iint_D y$ y como en este caso, $x_c = y_c = 0$, pero $A(D) = \pi a^2 \neq 0$, tiene que ser $\displaystyle\iint_D x = \iint_D y = 0$. La cuarta integral $\displaystyle\iint_D dydx = A(D)$.

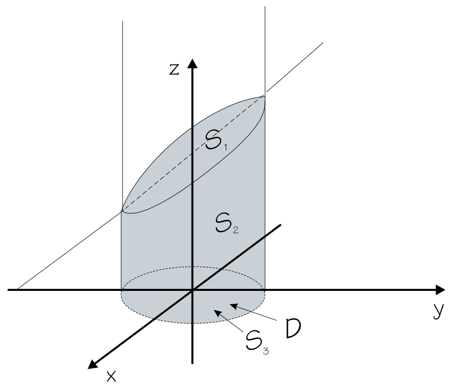


Figura 7.4:

Por lo tanto, $\displaystyle\int_{\partial\Omega} F\cdot dS = 2\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} xy\ dydx \quad + 4\pi a^3.$

Ahora bien,

$$\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} xy\ dydx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} x\left(y^2\right)_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} x[(\sqrt{a^2-x^2})^2 - (\sqrt{a^2-x^2})^2]dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} F\cdot dS = 4\pi a^3$$

Problema 5

Sea $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ con $\mathcal{S}_1 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = a^2,\ z\geq 0\},\ \mathcal{S}_2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq a^2,\ z = 0\}$.
Suponer que $\mathcal{S}$ se orienta exteriormente mediante el campo vectorial $\vec{n}$ (de vectores normales).
Sea $F(x,y,z) = (xz^2, x^2y - 2z^3, 2x^2y^2 + y^2z)$. Calcular $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} F\cdot\vec{n}\ dS$

Solución

Es obvio que $\mathcal{S}$ es una superficie cerrada y orientada formada por la parte superior de la superficie esférica: $x^2+y^2+z^2 = a^2,\ z\geq 0$ y el disco $x^2+y^2\leq a^2,\ z=0$. Por lo tanto, $\mathcal{S}$ es el borde de una semi-esfera sólida, $\mathcal{S} = \partial\Omega$. Además, $F\in\mathcal{C}^1(\Omega)$, por ser sus componentes funciones polinómicas en $\mathbb{R}^3$. Es lógico, entonces, utilizar el Teorema de Gauss, en lugar de sumar dos integrales de superficie. Así que:

$$\int_{\mathcal{S}=\partial\Omega} F\cdot\vec{n}\ dS = \iiint_{\Omega} div\ F = \iiint_{\Omega}(z^2+x^2+y^2).$$

La experiencia acumulada por el alumno sobre MA-2112, le debe indicar que lo más útil es pasar a coordenadas esféricas.

$$x = \rho(\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi,\ \ y = \rho(\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\varphi,\ \ z = \rho\cos\varphi;\quad \theta\in[0,2\pi],\ \ \varphi\in[0,\pi/2],\ \ \rho\in[0,a],$$

$$Abs\left(det\ \text{Jacobiano}\begin{pmatrix} xyz \\ \rho\theta\varphi \end{pmatrix}\right) = \rho^2\operatorname{sen}\varphi.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} F\cdot\vec{n}\ dS &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^a \rho^2\times\rho^2(\operatorname{sen}\varphi)\ d\rho d\theta d\varphi \\ &= 2\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}\varphi)\ d\varphi\right)\left(\int_0^a \rho^4\ d\rho\right) = \frac{2\pi a^5}{5}\end{aligned}$$

Problema 6
Sea $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ con $\vec{r} = (x,y,z)$. $\mathcal{S}$ una superficie cerrada, orientada con la normal exterior, $\vec{n}$, además $\mathcal{S}$ es el borde de un sólido cerrado Ω.
(a) Demuestre que el volumen $V(\Omega) = \dfrac{1}{6}\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} (\nabla r^2)\cdot \vec{n}\, dS$

(b) Utilice el resultado anterior para demostrar que el volumen de una esfera de radio R es $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Solución
Verifique primero las condiciones del Teorema de Gauss.
(a) Ahora, $r^2 = x^2+y^2+z^2 \Rightarrow \nabla r^2 = 2(x,y,z) = F(x,y,z)$

$$\frac{1}{6}\iint_{\mathcal{S}} (\nabla r^2)\cdot \vec{n}\, dS \overset{\text{T. Gauss}}{=} \frac{1}{6}\iiint_{\Omega} div\ F = \frac{1}{6}\iiint_{\Omega} 6 = \iiint_{\Omega} 1 = V(\Omega)$$

(b) Según (a)

$V(\Omega) = \dfrac{1}{6}\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} (\nabla r^2)\cdot \vec{n}\, dS = \dfrac{1}{6}\iint_{\mathcal{S}} 2(x,y,z)\cdot \dfrac{(x,y,z)}{R}\, dS$ puesto que para la esfera de radio R,

$$\Phi(u,v) = R((\cos u)\operatorname{sen} v, (\operatorname{sen} u)\operatorname{sen} v, \cos v), \quad T_u \times T_v = -R^2(\operatorname{sen} v)[(\cos u)\operatorname{sen} v, (\operatorname{sen} u)\operatorname{sen} v, \cos v]$$

y $\vec{n} = \dfrac{T_u\times T_v}{\|T_u\times T_v\|} = \dfrac{R^2(\operatorname{sen} v)[(\cos u)\operatorname{sen} v, (\operatorname{sen} u)\operatorname{sen} v, \cos v]}{R^2(\operatorname{sen} v)} = [(\cos u)\operatorname{sen} v, (\operatorname{sen} u)\operatorname{sen} v, \cos v] = \dfrac{(x,y,z)}{R}$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{6}\iint_{\mathcal{S}} (\nabla r^2)\cdot \vec{n}\, dS = \frac{1}{6}\iint_{\mathcal{S}} \frac{2(x^2+y^2+z^2)}{R}\, dS = \frac{R}{3}\iint_{\mathcal{S}} dS$$
$$= \frac{R}{3}A(S) = \frac{R}{3}(4\pi R^2) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Problema 7
Sea Ω el sólido comprendido dentro del paralelepípedo $\{(x,y,z) \mid |x| \le b, \ \ |y| \le b, \ \ 0 \le z \le b\}$ y fuera del cilindro $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le b^2\}$. Sea $F(x,y,z) = (xz, 2xy, xy+3yz)$. Hallar $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} F\cdot dS =$ flujo de F hacia afuera de Ω.

Solución
Verificar condiciones del Teorema de Gauss.
(ver fig. 7.5) Por lo tanto,

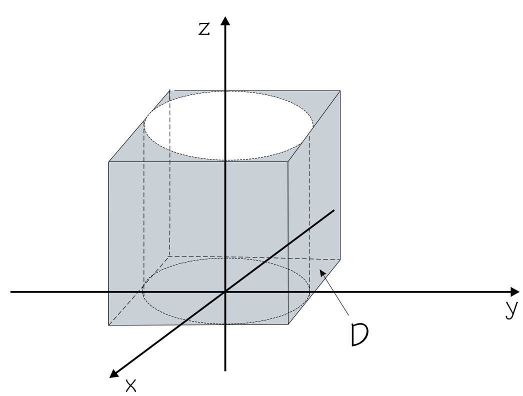


Figura 7.5:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} F \cdot dD &= \iiint_{\Omega} div\ F = \iiint_{\Omega} (z+2x+3y) \\
&= \iiint_{\Omega} z + 2\underbrace{\iiint_{\Omega} x}_{=0*} + 3\underbrace{\iiint_{\Omega} y}_{=0*} = \iiint_{\Omega} z \\
&= \iint_{\mathrm{Proy}_{xy}\Omega = D} \left[\int_0^b z\right] dzdydx = \frac{b^2}{2}\iint_D dydx = \frac{b^2}{2}\ A(D) \\
&= \frac{b^2}{2} \times 4 \times \left(b^2 - \frac{1}{4}\pi b^2\right) = b^4\frac{4-\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Nota: $A(D) = 4$ veces (el área de un cuarto de cuadrado menos el área del sector circular) (ver fig. 7.6).

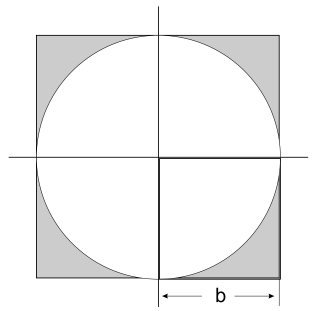


Figura 7.6:

* Recordar las fórmulas del centroide de un sólido Ω vistas en MA-2112 : $x_c = \dfrac{1}{V(\Omega)}\iiint_{\Omega} x, \quad y_c = \dfrac{1}{V(\Omega)}\iiint_{\Omega} y.$

Problema 8

Sea $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$ con $\mathcal{S}_1 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = z^2,\ \ 1 \le z \le 2\}$, $\mathcal{S}_2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 1,\ \ z = 1\}$, $\mathcal{S}_3 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 4,\ \ z = 2\}$.

Suponer que $\mathcal{S}$ se orienta exteriormente mediante el campo vectorial $\vec{n}$ (de vectores normales).

Sea $F(x,y,z) = \left(\dfrac{xz\sqrt{z^2-y^2}}{4}, xyz, \dfrac{(z^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{4} - \dfrac{1}{2}xz^2\right)$, calcular $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} F \cdot \vec{n}\ dS$

Solución

Verificar condiciones del Teorema de Gauss (ver fig. 7.7).

$div\ F(x,y,z) = \dfrac{1}{4}z\sqrt{z^2-y^2} + xz + \dfrac{3}{2}(z^2-y^2)^{\frac{1}{2}} \times 2z\dfrac{1}{4} - xz = z\sqrt{z^2-y^2}$

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}=\partial\Omega} F \cdot \vec{n}\ dS &= \iiint_{\Omega} div\ F = \int_1^2\int_{-z}^{z}\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} z\sqrt{z^2-y^2}\ dxdydz \\
&= \int_1^2\int_{-z}^{z}\left(z\sqrt{z^2-y^2}\times x\right)\Big|_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} dydz = 2\int_1^2\int_{-z}^{z} z(z^2-y^2)\ dydz \\
&= \frac{248}{15}.
\end{aligned}
$$

Nota: Se proyectó Ω sobre el plano yz.

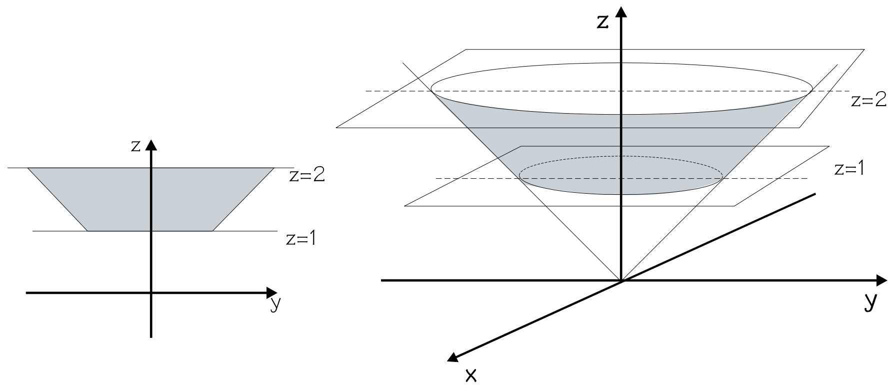


Figura 7.7:

Problema 9

Sea el campo vectorial $F(x,y,z) = \dfrac{1}{\rho^3}(x,y,z)$ con $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. F definida en $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$.

(a) Demuestre que F es un campo vectorial incompresible.

(b) Sea Ω el sólido limitado por el elipsoide $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$ y por la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2 = 1$. Hallar $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} F$ tomando la normal exterior.

(c) Sea $\mathcal{S} =$ superficie del elipsoide. Deduzca de lo anterior el valor del flujo $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} F$.

Solución

(a)

$$\begin{aligned}
div\ F(x,y,z) &= \frac{\partial(\frac{x}{\rho^3})}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{y}{\rho^3})}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{z}{\rho^3})}{\partial z} \\
&= \frac{1}{\rho^6}\left(\rho^3 - x \times 3\rho^2 \frac{x}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho^6}\left(\rho^3 - y \times 3\rho^2 \frac{y}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho^6}\left(\rho^3 - z \times 3\rho^2 \frac{z}{\rho}\right) \\
&= \frac{1}{\rho^6}[3\rho^3 - 3\rho(x^2+y^2+z^2)] = \frac{3\rho^3 - 3\rho^3}{\rho^6} = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow F$ es incompresible.

(b) $\partial\Omega = \partial A \cup \partial B$

$\displaystyle\int_{\partial\Omega} F = \iiint_{\Omega} div\ F = \iiint_{\Omega} 0 = 0$ (ver fig. 7.8)

(c) $\mathcal{S} = A =$ superficie del elipsoide.

$\displaystyle\int_{\partial\Omega} F \overset{\text{por (b)}}{=} 0 = \int_{\mathcal{S}} F + \int_B F \Rightarrow \int_{\mathcal{S}} = -\int_B F = 4\pi$ ya que por el lema de Gauss,

$\displaystyle\int_B \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^3} dS = \int_{B=\partial M} F = -4\pi$ (debido a la orirentación dada y a que $(0,0,0) \in M$).

Problema 10

Sea $F(x,y,z) = \left(\dfrac{x^3 y}{4+y^2} + y^2 z^3\right)\vec{i} + \left(z^2 + 3x^2 \arctan\dfrac{y}{2}\right)\vec{j} + \left(2 - \dfrac{3x^2(y+2)z}{4+y^2}\right)\vec{k}$.

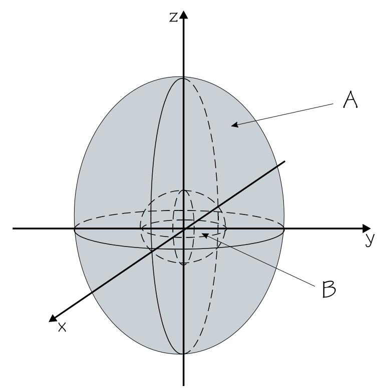


Figura 7.8:

Calcular $\iint_{\mathcal{S}} F \cdot \vec{n}\ dS$ siendo $\mathcal{S}$ la porción de superficie dada por $z = 4 - x^2 - y^2$ acotada por el plano xy y $\vec{n} =$ normal unitaria con tercera componente negativa.

Solución
Verificar condiciones del Teorema de Gauss.
(Ver fig. 7.9)   Ahora,

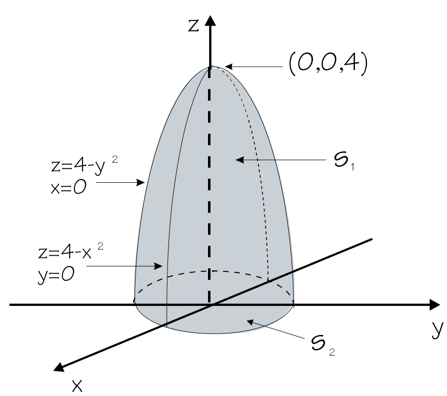


Figura 7.9:

$$\begin{aligned} div\ F(x,y,z) &= \frac{3x^2y}{4+y^2} + 3x^2\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{y^2}{4}} - \frac{3x^2(y+2)}{4+y^2} \\ &= \frac{3x^2y}{4+y^2} + \frac{6x^2}{4+y^2} - \frac{3x^2y+6x^2}{4+y^2} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando Teorema de Gauss, $\iint_{\mathcal{S}=\partial\Omega} F \cdot \vec{n}\ dS = \iiint_{\Omega} div\ F = \iiint_{\Omega} 0 = 0.$

(Obsérvese lo largo que hubiera sido calcular la integral dada directamente como integral de superficie: $\iint_{D_1=\mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S}_1} F(\Phi_1(x,y)) \cdot {}"(T_x \times T_y)_1" + \iint_{D_2=\mathrm{Proy}_{xy}\mathcal{S}_2=D_1} F(\Phi_2(x,y)) \cdot {}"(T_x \times T_y)_2"$ con $\Phi_1(x,y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$, $\quad \Phi_2(x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [0, 2]$).

Parte II

Variable Compleja, Integración Compleja

Capítulo 8

Repaso sobre números complejos

Objetivos: Aquí vamos a necesitar que el alumno ponga de su parte y haga un repaso de los principales conceptos sobre números complejos, toda vez que los va a necesitar de aquí en adelante.

8.1 Preliminares

Toda vez que este tema se trata en bachillerato y luego se repasa al entrar a la Universidad, vamos a recomendar al alumno una revisión de los tópicos siguientes:

1. Forma Binómica de un complejo Z: $a + bi$.
2. Conjugado: $\bar{Z} = a - bi$.
3. Módulo: $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ si $z = a + bi$.
4. Operaciones de complejos en forma binómica: $Z_1 + Z_2$; $Z_1 - Z_2$; $Z_1 \cdot Z_2$; $Z_1 \cdot \bar{Z}_1$; Z_1/Z_2.
5. Forma Polar o Trigonométrica de Z: $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$. Notación: $\rho\ cis(\theta)$. $\rho = |Z|$ y $\theta = \begin{cases} \tan^{-1}(\frac{b}{a}) & si\ \ a > 0 \\ \pi - \tan^{-1}(\frac{b}{a}) & a < 0 \end{cases}$
   Si $a = 0$, se toma uno de los límites del arcotangente $(-\frac{\pi}{2}\ \ y\ \ \frac{\pi}{2})$ según el caso.
6. Paso de forma binómica a trigonométrica y viceversa.
7. Fórmula de De Moivre: $Z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) = \rho^n cis(n\theta)$.
8. Operaciones de Complejos en forma trigonométrica: $Z_1 \pm Z_2$; $Z_1 \cdot Z_2$; Z_1/Z_2.
9. Potencias de la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$:
   $i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; y en general $i^{4k+r} = i^r$; con $r \leq 3$; ya que $i^{4k} = 1$.
10. $\sqrt[n]{Z}$ con Z en la forma $\rho\ cis(\theta)$.

Suponiendo que el alumno ha hecho el repaso correspondiente, vamos a sugerir algunos ejercicios interesantes, en algunos daremos las soluciones correspondientes, otros serán dejados al alumno.

8.2 Ejercicios Resueltos

Problema 1
Ilustrar los conjuntos de puntos del plano complejo, dados a continuación, siendo $a, b, c, d, \alpha, \beta$ números reales fijos con $b > a$, $d > c$, $-\pi < \alpha < \beta < \pi$.
(a) $\{z \ \mid\ Im\ z \geq c > 0\}$

(b) $\{z \mid Re\, z \leq b\}$
(c) $\{z \mid c \leq Im\, z < d\}$
(d) $\{z \mid a < Re\, z \leq b\}$
(e) $\{z \mid a \leq Re\, z \leq b\} \cap \{z \mid c \leq Im\, z \leq d\}$

Solución
Ver Figuras Correspondientes.

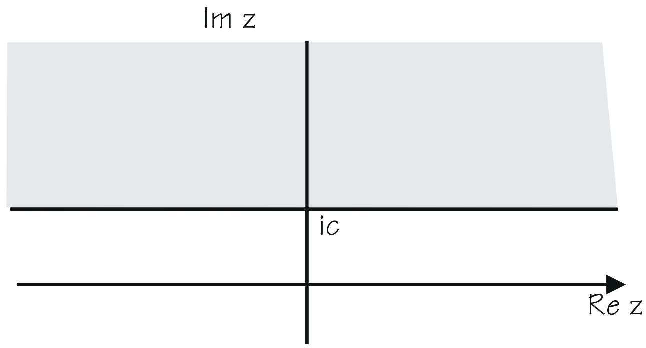


Figura 8.1: Solución Parte a, Problema 1

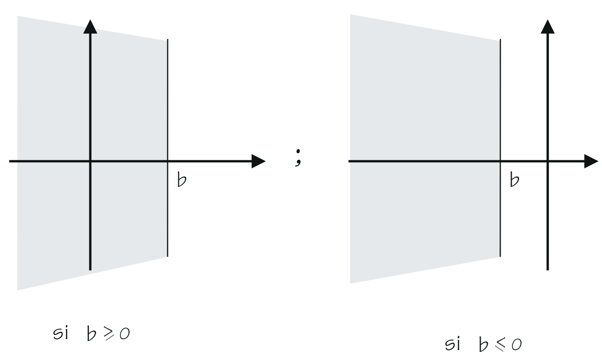


Figura 8.2: Solución Parte b, Problema 1

Problema 2
Reconocer $\left\{z \mid Re \left(\dfrac{z+3}{z-5}\right) = 0\right\}$

Solución
$$Re \left(\frac{z+3}{z-5}\right) = Re \left(\frac{x+iy+3}{x+iy-5}\right) = Re \left(\frac{x+3+iy}{x-5+iy}\right) = Re \,\frac{(x+3+iy)(x-5-iy)}{(x-5+iy)(x-5-iy)} =$$
$$Re \,\frac{(x+3)(x-5)+y^2+i(-8y)}{(x-5)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-5)+y^2}{(x-5)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-5)+y^2 = 0$$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 16$ (Completando cuadrados) Lo cual representa a una circunferencia de centro el punto $(0,1)$ y radio 4.

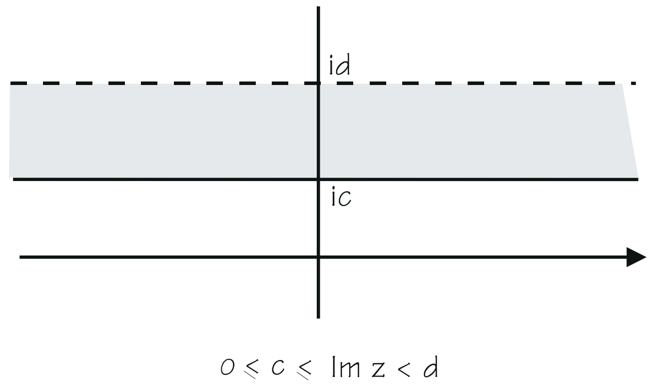


Figura 8.3: Solución Parte c.1, Problema 1

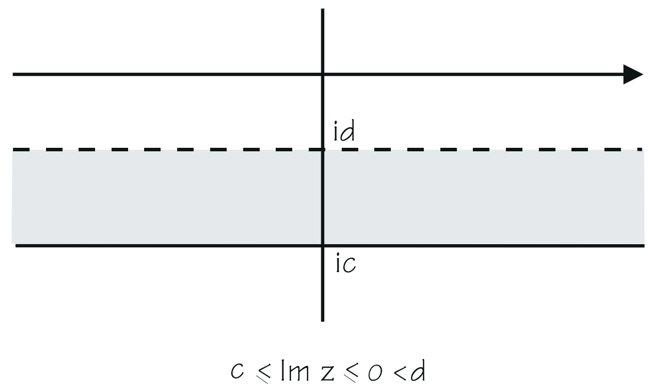


Figura 8.4: Solución Parte c.2, Problema 1

Problema 3
Reconocer $\{Z \mid \; 2Re\ z + 3Im\ z < 6\}$

Solución
Sea $z = x + iy, \;\; 2Re\ z + 3Im\ z < 6 \Leftrightarrow 2x + 3y < 6$
Ver figura 8.8

Problema 4
Expresar $\cos{(5\theta)}$ y $\operatorname{sen}{(5\theta)}$ en términos de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$

Solución
Sea $z = cis\theta = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$
$z^5 = \cos{(5\theta)} + i\operatorname{sen}{(5\theta)}$ (por fórmula de De Moivre)
Pero también
$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^5 = \cos^5\theta + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}(\cos^4\theta)i\operatorname{sen}\theta + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}(\cos^3\theta)i^2\operatorname{sen}^2\theta + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}(\cos^2\theta)i^3\operatorname{sen}^3\theta +$

$+ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}(\cos\theta)i^4\operatorname{sen}^4\theta + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}i^5\operatorname{sen}^5\theta =$

$\cos^5\theta + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}(\cos^4\theta)(\operatorname{sen}\theta)i - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}(\cos^3\theta)\operatorname{sen}^2\theta - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}(\cos^2\theta)(\operatorname{sen}^3\theta)i + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}(\cos\theta)\operatorname{sen}^4\theta +$

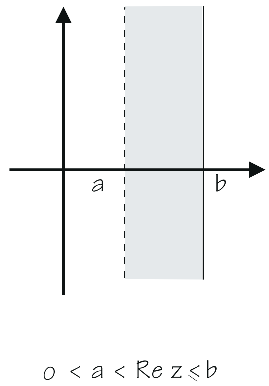


Figura 8.5: Solución Parte d.1, Problema 1

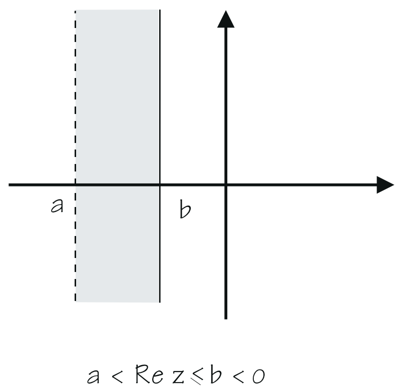


Figura 8.6: Solución Parte d.2, Problema 1

$$+\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} i \operatorname{sen}^5\theta =$$

$$\cos^5\theta - 10(\cos^3\theta)\operatorname{sen}^2\theta + 5(\cos\theta)\operatorname{sen}^4\theta + i(\ 5(\cos^4\theta)\operatorname{sen}\theta - 10(\cos^2\theta)\operatorname{sen}^3\theta + \operatorname{sen}^5\theta\ ) \ \Rightarrow$$
$$\cos(5\theta) = \cos^5\theta - 10(\cos^3\theta)\operatorname{sen}^2\theta + 5(\cos\theta)\operatorname{sen}^4\theta$$
$$\operatorname{sen}(5\theta) = \operatorname{sen}^5\theta + 5(\cos^4\theta)\operatorname{sen}\theta - 10(\cos^2\theta)\operatorname{sen}^3\theta$$

Problema 5
Describir el conjunto $A = \{z \mid Im\ (z+5) = 0\}$

Solución
$A = \{z \mid Im(x+iy+5) = 0\} = \{z \mid y = 0\} \Rightarrow$ eje x.

Problema 6
Si $z = x_1 + iy_1$ y $w = x_2 + iy_2$ son dos complejos cualesquiera (excepto cuando se indique que alguno de ellos sea distinto del cero complejo $0 + 0i$)

(a) $|z| \geq 0;\ \ |z| = 0 \ \Leftrightarrow\ z = 0 + 0i = O$

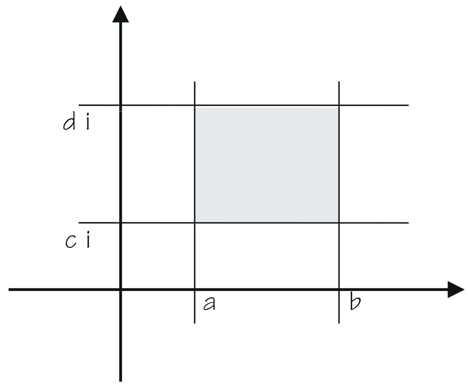


Figura 8.7: Solución Parte e, Problema 1

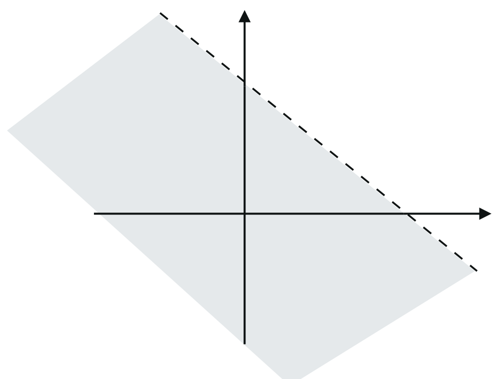


Figura 8.8: Problema 3

(b) $z\bar{z} = |z|^2$ y en consecuencia $|z|^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ si $Z \neq O$

(c) $|zw| = |z||w|$ y $|z/w| = |z|/|w|$ si $w \neq O$
(d) $|Re\ z| \leq |z|$, $|Im\ z| \leq |z|$
(e) $|\bar{z}| = |z|$
(f) $w\bar{z} = \overline{z\bar{w}}$ y $w\bar{z} + z\bar{w} = 2Re\ (w\bar{z})$
(g) $|z + w| \leq |z| + |w|$
(h) $|\ |z| - |w|\ | \leq |z - w|$

(i) $Re\ z = \dfrac{(z + \bar{z})}{2};\ Im\ z = \dfrac{(z - \bar{z})}{2i}$

(j) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w};\ \ \overline{zw} = \bar{z}\bar{w};\ \ |z| = |\bar{z}|,\ \ \bar{\bar{z}} = z$

Solución
Vamos a hacer algunas de ellas, sencillas: Demostrar que para cualquier par de complejos z y w se cumple que
(i) $Re\ z = \dfrac{z + \bar{z}}{2},\ \ Im\ z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

(j) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w},\ \ \overline{zw} = \bar{z}\bar{w},\ \ |\bar{z}| = |z|,\ \ \bar{\bar{z}} = z$
Sean $z = a_1 + ib_1$, $w = a_2 + ib_2$, entonces

(i) $Re\ z = a_1$ pero $\dfrac{z + \bar{z}}{2} = \dfrac{1}{2}(a_1 + ib_1 + a_1 - ib_1) \Rightarrow \dfrac{z + \bar{z}}{2} = a_1.$

Ahora $Im\ z = b_1$ mientras que $\dfrac{z - \bar{z}}{2i} = \dfrac{1}{2i}(a_1 + ib_1 - (a_1 - ib_1)) = \dfrac{1}{2i}(a_1 + ib_1 - a_1 + ib_1) \Rightarrow \dfrac{z - \bar{z}}{2i} = b_1.$

(j) $\overline{z+w} = \overline{a_1+ib_1+a_2+ib_2} = \overline{(a_1+a_2)+i(b_1+b2)} = a_1+a_2-i(b_1+b_2) = a_1-ib_1+a_2-ib_2 = \bar{z}+\bar{w}.$

$\overline{zw} = \overline{(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)} = \overline{a_1a_2-b_1b_2+i(b_1a_2+a_1b_2)} = a_1a_2-b_1b_2-i(b_1a_2+a_1b_2)$ Mientras que
$\bar{z}\bar{w} = (a_1-ib_1)(a_2-ib_2) = a_1a_2-b_1b_2-i(a_1b_2+b_1a_2)$
$|\bar{z}| = |a-bi| = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$
$\bar{\bar{z}} = \overline{a-bi} = a+bi = z$
Otras son un poco más elaboradas, como por ejemplo la (g) $|z+w| \leq |z|+|w|$: En efecto: $|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z+w})$ por propiedad (6) - b
$= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z}+w\bar{w}+z\bar{w}+w\bar{z}$ (se sabe que la distributividad vale en $\mathbb{C}$) $= |z|^2+|w|^2+\overline{w\bar{z}}+\overline{z\bar{w}} = |z|^2+|w|^2+\overline{w\bar{z}+z\bar{w}}$ (se utilizó (f))
Por tanto $|z+w|^2 = |z|^2+|w|^2+2Re\,(w\bar{z}) \leq |z|^2+|w|^2+2|w\bar{z}|$ (puesto que $2Re\,(w\bar{z}) \leq 2|w\bar{z}|$)
Por tanto $|z+w|^2 \leq |z|^2+|w|^2+2|w\bar{z}| = |z|^2+|w|^2+2|w||z|$ (por (c) y (e)), y por conclusión $|z+w| \leq |z|+|w|$.
Las demás se dejan como ejercicios.

Problema 7
Sea $\Omega = \{\, z \in \mathbb{C} | z^{12} = 2\sqrt{3}+2i\}$
(a) Hallar los $w \in \Omega$ tales que $w = \rho\; cis\theta$, $\theta \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
(b) Calcular $|w|^6$ para las soluciones de (a).

Solución
(a) $z^{12} = 2\sqrt{3}+2i \Rightarrow |z| = \rho = \sqrt[12]{|2\sqrt{3}+2i|} = \sqrt[12]{\sqrt{16}} = \sqrt[12]{4} = \sqrt[6]{2}$
$\theta = argumento(2\sqrt{3}+2i) = \tan^{-1}\frac{2}{2\sqrt{3}} = \pi/6$
(observar que $z = 2\sqrt{3}+2i$ esta en el primer cuadrante)
$Arg\; z = \dfrac{\pi/6+2k\pi}{12},\; k = 0,1,2,...,11$
(Para esto es necesario repasar $\sqrt[n]{z}$)
Por tanto, $z = \sqrt[6]{2}\; cis\left(\dfrac{\pi}{72}+\dfrac{k\pi}{6}\right),\quad k = 0,1,2,\ldots,11$

$$W_k = \sqrt[6]{2}\; cis\left(\frac{\pi}{72}+\frac{k\pi}{6}\right),\quad k = 0,1,2,\ldots,11$$

Todas las raíces de la ecuación $z^{12} = 2\sqrt{3}+2i$. Ahora queremos hallar aquellos W_k tales que $\theta \in (\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi)$ pero como $\theta \in$ 4to cuadrante, los W_k en Ω son aquellos para los cuales $\dfrac{\pi}{72}+\dfrac{k\pi}{6} \in$ 4to cuadrante y ellos son para

$$k = 9 \Rightarrow W_9 = \sqrt[6]{2}\; cis\left(\frac{109\pi}{72}\right)$$

$$k = 10 \Rightarrow W_{10} = \sqrt[6]{2}\; cis\left(\frac{121\pi}{72}\right)$$

$$k = 11 \Rightarrow W_{11} = \sqrt[6]{2}\; cis\left(\frac{133\pi}{72}\right)$$

(b) $|W_k|^6 = (\sqrt[6]{2})^6 = 2$ para $k = 0,1,2,...,11$

Problema 8
Resolver la ecuación $z^5 = 2$

Solución

$Z_k = \sqrt[5]{2}\ cis\left(\frac{2k\pi}{5}\right),\ k = 0, 1, 2, ..., 4$

Problema 9
Calcular $\sqrt[4]{-i}$

Solución
$Z_k = cis\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4}\right),\ k = 0, 1, 2, 3$

Problema 10
Sea $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$
(a) Hallar todas las soluciones en forma polar.
(b) Hallar todas las soluciones en forma binómica.
(c) Representar las soluciones.

Solución
$w = z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i\ \Rightarrow z = \sqrt[4]{w} = \sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$
$|w| = \sqrt{64 + 64 \cdot 3} = 16;\ \theta_w = \tan^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{-8}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{-3}).$
Sabemos que $\tan^{-1}(\sqrt{3}) = \pi/3 \in$ Primer cuadrante pero $\theta_w = \tan^{-1}(\sqrt{-3})$ está en el segundo cuadrante. Por tanto $\theta_w = \pi - \pi/3 = (2\pi)/3$
$z = \sqrt[4]{16}\ cis\frac{2\pi/3 + 2k\pi}{4},\ k = 0, 1, 2, 3$

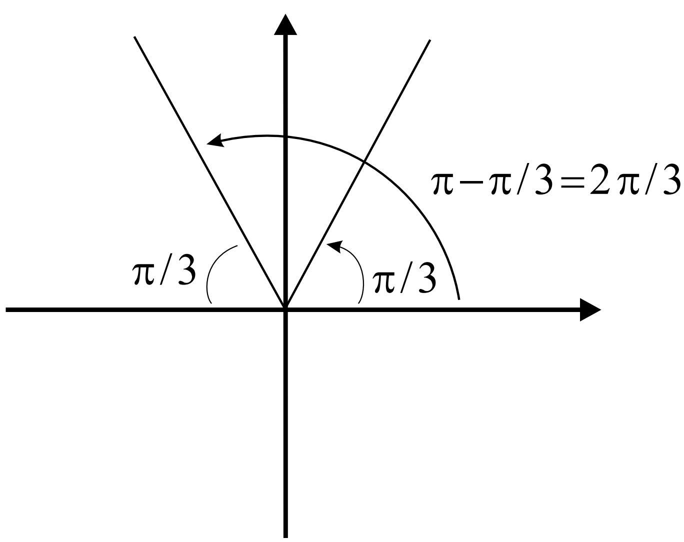


Figura 8.9: Problema 10

(a) $z_0 = 2\ cis(\pi/6), z_1 = 2\ cis(2\pi/3), z_2 = 2\ cis(7\pi/6), z_3 = 2\ cis(10\pi/6)$
(b) $z_0 = \sqrt{3} + i, z_1 = -1 + \sqrt{3}i, z_2 = -\sqrt{3} - i, z_3 = 1 - \sqrt{3}i$
(c) La representación de las soluciones es (Ver figura 8.10)

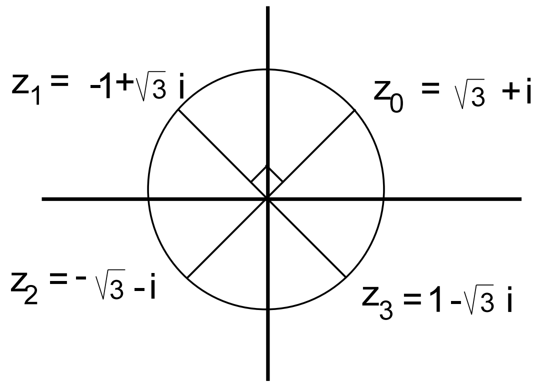


Figura 8.10: Parte (c). Solución Problema 10

Problema 11
Demuestre que el conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ tales que $2(1+3i)Re\ (z^2) = 0$, es un par de rectas y halle las ecuaciones de las mismas.

Solución
$z^2 = (x+iy)^2 = (x+iy)(x+iy) = x^2 - y^2 + 2xyi$
$2(1+3i)Re\ (z^2) = 2(1+3i)(x^2-y^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0$
$\Leftrightarrow x = \pm y \Rightarrow \begin{cases} recta & \text{x=y} \\ recta & \text{x=-y} \end{cases}$

Capítulo 9

Funciones Complejas. Límite y Continuidad

Objetivos: Aquí el alumno aprenderá los importantes conceptos de límite y continuidad para funciones de $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

9.1 Definiciones

Definición 1.
Una función f definida en los números complejos, se llama, función de **variable compleja**.
$f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$z \longrightarrow f(z)$

Diversas notaciones: $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C};\ \ z \longrightarrow f(z)$, ó decir la función $z \longrightarrow f(z)$ ó simplemente la función $f(z)$. (aunque esta última no es correcta desde el punto de vista didáctico, pero por comodidad, es la más usada)
Ejemplos.
(a) La función $z \longrightarrow z$, es la función identida, va de $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y transforma a un complejo en si mismo.
(b) $z \longrightarrow \bar{z}$, esta función asigna a cada complejo su conjugado.
(c) $z \longrightarrow w$, $w = constante\ compleja$, es cualquier $z = x + iy\ \in \mathbb{C}$ es transformado por la función en la constante $w = a + bi$.
(d) Un polinomio de grado n en la variable z es un función $\begin{array}{l} p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longrightarrow f(z) \end{array}$ con $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, con $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0 + 0i$.
Definición 2.
Sea $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ \ z \longrightarrow f(z)$
Entonces, así como para un complejo $z = x + iy$ se llaman $x = Parte\ Real\ z = Re\ z$ y $y = Parte\ Imaginaria\ z = Im\ z$. Aqui podemos describir f mediante dos "Campos Escalares" en $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $u(x, y) = Re\ f(z)$ y $v(x, y) = Im\ f(z)$
Notación. $f(z) = f(x + iy) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = u(z) - iv(z) = (\ u(x, y), v(x, y)\ )$
Definición 3.
Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es un "Conjunto Abierto" en $\mathbb{C}$ si para cada punto $Z_0\ \in\ A$ existe $\epsilon_{positivo}\ \in \mathbb{R}$, tal que $|z - z_0| < \epsilon$, $z \in A$.
Definición 4.
El conjunto $\{\ z\ \in\ \mathbb{C}\ |\ \ |z - z_0| < r,\ \ r\ dado\}$ es un disco abierto de centro z_0 y radio r.
Notación: $D(z_0; r)$
Ahora, si el disco abierto no contiene a z_0, se denota $D(z_0^-; r) = D(z_0; r)$
$\{z_0\}$.
También para la definición 3 podría presentarse como: $A \subset \mathbb{C}$ es abierto en $\mathbb{C}$ si para cada punto $z_0 \in A$ existe $D(z_0; r) \subset A$.
En el texto del Prof. A. Etcheberry se encuentra la demostración de que todo disco abierto en $\mathbb{C}$ es a su vez un conjunto abierto en $\mathbb{C}$. En el mismo texto se encuentran varios ejemplos de conjuntos abiertos, entre ellos, el conjunto vacío , es un conjunto abierto así como también el propio $\mathbb{C}$.
Definición 5.

$B \subset \mathbb{C}$ es un "Conjunto Cerrado", si su complemento $\mathbb{C}$
A es abierto.
Sin embargo hay subconjuntos de $\mathbb{C}$ que no son ni abiertos, ni cerrados.
Definición 6.
Sea A un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ que no necesariamente contiene a $z_0 \in \mathbb{C}$.
Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$. Se dice que el límite de f en z para $z \to z_0$ es $l \in \mathbb{C}$, si dado ϵ_{real} y positivo existe un δ_{real}, función de ϵ también positivo tal que $|z - z_0| < \delta \Rightarrow \ |f(z) - l| < \epsilon$.
Notación:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l$$

(Obsérvese que en la definición de límite, z_0 puede estar en $Dom\ f$ o no).
Teorema 1.
Sea $A_{abierto} \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in (\ A \cup (A$
$\{z_0\})\ ),\ \ z_0 = x_0 + iy_0\ \ l = l_1 + il_2$ complejo dado y $f = u + iv : A \longrightarrow \mathbb{C}$ Entonces

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = l_1 \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = l_2 \end{array}$$

Teorema 2.(Propiedades de los límites)
Sean $\begin{array}{l} f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ g : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \end{array},\ z_0 \in A$
Sean a y b en $\mathbb{C}$. Si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$ y $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = b$ entonces:

1. $\lim\limits_{z \to z_0} (f + g)(z) = a + b$

2. $\lim\limits_{z \to z_0} (\alpha f)(z) = \alpha a,\ \alpha \in \mathbb{C}$

3. $\lim\limits_{z \to z_0} (f \cdot g)(z) = a \cdot b$

4. $\lim\limits_{z \to z_0} (\dfrac{f}{g})(z) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{a}{b}\ \ si\ b \neq 0 + 0i$ y si $g(z) \neq 0 + 0i$

5. Si se tiene $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $h : B \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ con Imagen de $f \subset B$ y A, B abiertos en $\mathbb{C}$. Si además $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$ y $\lim\limits_{z \to z_0} h(w) = b$ entonces $\lim\limits_{z \to z_0} (h \circ f)(z) = \lim\limits_{z \to z_0} h(f(z)) = c$. $(h \circ f)$ es composición de funciones.

Definición 7.(Continuidad)
Sea A abierto $\subset \mathbb{C}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ f es "contínua en z_0" $\Leftrightarrow$ se cumplen las condiciones siguientes:

1. $z_0 \in A$ (En el caso de límite no era necesario)

2. $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$

3. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Esta definición, utilizando ϵ y δ sería:
f es contínua en $z_0 \in A$ si dado $\epsilon_{real} > 0$ existe δ_{real} función de ϵ, también > 0 tal que

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

Ahora bien, si f es contínua para todo $w \in A$ se dice que f es contínua en A.
Teorema 3.(Propiedades de las funciones contínuas)
Sean f y $g : A_{abierto} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, contínuas en z_0, entonces también son contínuas en z_0 las funciones:
$f + g, \;\; \alpha f, \;\; \frac{f}{g}$ con $g(z) \neq O$.
Además, si f es continua en z_0 y h lo es en $w_0 = f(z_0)$, entonces será contínua la composición $g \circ f$ en z_0.
Teorema 4.
Sea $A_{abierto} \subset \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$
$f = u + iv : A \longrightarrow \mathbb{C}$
Entonces f es contínua en $z_0 \Leftrightarrow u$ y v son contínuas en (x_0, y_0). (Recuérdese que u y v son campos escalares, es decir, funciones de A como conjunto de pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$). En simbolos: $f = u + iv$ es contínua en $z_0 \Leftrightarrow u(x, y)$ y $v(x, y)$ son contínuas en (x_0, y_0).

9.2 Ejercicios Resueltos

Problema 1
Sea la función polinómica p:
$\begin{array}{l} p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longrightarrow p(z) = -iz^3 - 3z^2 + z + 2 - 3i \end{array}$. Hallar $Re\ p(z)$, $Im\ p(z)$.

Solución
$z = x + iy$, $z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$
$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$
$p(z) = -iz^3 - 3z^2 + z + 2 - 3i = -i[x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i] - 3x^2 - 3y^2 + 6xyi + x + iy + 2 - 3i = -ix^3 + 3xy^2i + 3x^2y - y^3 - 3x^2 + 3y^2 + 6xyi + x + iy + 2 - 3i = 3x^2y - y^3 3x^2 + 3y^2 + x + 2 + i(y + 3xy^2 - x^3 - 6xy - 3)$
$\Rightarrow$

$$u(x, y) = Re\ p(z) = 3x^2y - y^3 3x^2 + 3y^2 + x + 2$$

$$v(x, y) = Im\ p(z) = y + 3xy^2 - x^3 - 6xy - 3$$

Problema 2
Sea $f(z) = \dfrac{1}{z}, \;\; z \neq 0 + 0i$. Hallar $Re\ f(z)$, $Im\ f(z)$.

Solución
$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x + iy} = \dfrac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{y}{x^2 + y^2}i$
$u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$
$v(x, y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$

Problema 3
Dada $f(z) = z^4$. Hallar $Re\ f(z)$, $Im\ f(z)$.

Solución
$u(x, y) = (x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2$
$v(x, y) = 4xy(x^2 - y^2)$

Problema 4
Sea $f(z) = (a - ib)z - (b - 2)i\bar{z}^2$. Hallar $Re\ f(z)$, $Im\ f(z)$.

Solución
$u(x, y) = ax + by - 2xy(b - 2)$
$v(x, y) = ay - bx + (b - 2)(x^2 + y^2)$

Problema 5
Demuestre que existe $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ para la función identidad en $\mathbb{C}$, en un z_0 cualquiera de $\mathbb{C}$

Solución
$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $z \longrightarrow f(z) = z$
Ahora, sea z_0 cualquiera en $\mathbb{C}$.
Fijado $\epsilon_{real} > 0$ debemos hallar δ_{real}, $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - z| < \epsilon$
$|f(z) - z| = |z - z| = 0$ <cualquier ϵ.Luego $0 < |z - z_0| < \delta \ \Rightarrow |f(z) - z| = 0 < \epsilon$ siempre.
Quedando demostrado que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe y es z.

Problema 6
Utilice el ejercicio anterior para demostrar que la función identidad es contínua en $\mathbb{C}$.

Solución
En efecto: $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \mid z \longrightarrow f(z) = z$ es contínua en cualquier $z_0 \in \mathbb{C}$ puesto que si $|z - z_0| < \delta,\ \ |f(z) - z_0| < \epsilon$ si se elige $\delta \leq \epsilon$.

Problema 7
Demuestre que $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \mid f(z) = z^n$ es contínua para todo $z_0 \in \mathbb{C}$.

Solución
Sólo falta probar, que existe $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = {z_0}^n$. En efecto, $f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z) \cdot \ldots \cdot f_n(z)$ con $f_j(z) = z,\ j = 1, 2, \ldots, n$. Luego existe $\lim\limits_{z \to z_0} f_j(z)$ ya que cada f_j es la función identidad, el ejercicio (6) nos dice que $\lim_{z \to z_0} f_j(z) = z_0$ y ahora aplicando la propiedad 3 del Teorema 2, e inducción sobre n, se tiene que existe $\lim_{z \to z_0}[f_1(z) \cdot f_2(z) \cdot \ldots \cdot f_n(z)] = (\lim_{z \to z_0} f_1(z)) \cdot (\lim_{z \to z_0} f_2(z)) \cdot \ldots \cdot (\lim_{z \to z_0} f_n(z)) = z_0 \cdot z_0 \cdot \ldots \cdot z_0 = {z_0}^n$.

Problema 8
Ahora, con el ejercicio (7) y las propiedades 2 y 1 del Teorema 2 e inducción sobre n, es fácil deducir que la función polinómica $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\ \ p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n;\ \ a_i, z$ en $\mathbb{C}$ y $a_n \neq O$ es una función contínua en z.

Solución
Se deja como ejercicio para el estudiante.

Problema 9
Utilizando la definición de límite, demuestre que la función $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \mid f(z) = 5|z|$ es contínua para todo $a \in \mathbb{C}$

Solución
$|f(z) - f(a)| = |\ 5|z| - 5|a|\ | = 5|\ |z| - |a|\ | \leq 5|z - a|$ esto último se deduce del Teorema 1.3 página 15 del Texto del Prof. Etcheberry, apartado (g): todo par de complejos z y w se cumple que $|\ |z| - |w|\ | \leq |z - w|$. Luego, dado $\epsilon_{real} > 0$ vamos a hallar δ_{real}, $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $|z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| \leq 5|z - a|$ será $< \epsilon$ si elegimos $\delta \leq \frac{\epsilon}{5}$. (así, $|z - a| < \delta\ \Rightarrow |f(z) - f(a)| \leq 5|z - a| < 5\delta \leq 5\frac{\epsilon}{5} = \epsilon$).

Problema 10
Utilizando el ejercicio (8) y el Teorema 3 (si f y g son contínuas en $z_0 \in \mathbb{C}$, con $g(z_0) \neq O$, f/g es contínua en z_0) demuestre que una "función racional" es contínua en todo el plano complejo, excepto en los puntos donde se anule el denominador.

Solución
La demostración de deja como ejercicio. Sin embargo la experiencia nos dice, que no está de más repasar la definición de "función racional en $R(z)$ en $\mathbb{C}$": Una función racional $R(z)$ en $\mathbb{C}$ es un cociente de dos polinomios $\dfrac{p(z)}{q(z)}$ tales que $q(z) \neq O$.

Problema 11
Demuestre que son contínuas en $\mathbb{C}$ las funciones definidas como:
(a) $f(z) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$
(b) $g(z) = (\operatorname{sen} x) \cos y + i(\cos x) \operatorname{senh} y$
con $\operatorname{senh} y =$seno hiperbólico de y

Solución
(a) Sean $u(x, y) = e^x \cos y;\ v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$.
Las funciones u y v son contínuas en $\mathbb{R}^2$ por ser productos de la exponencial por función trigonométrica (sen o cos). Luego, aplicando el Teorema 4, $f(z) = u + iv$ es contínua en z_0, z_0 cualquiera en $\mathbb{C}$ (b) La demostración es análoga a la de (a), excepto que se reemplaza $\operatorname{sen} y$ por $\operatorname{senh} y$.

Problema 12
Es cada una de las funciones a continuación, contínua en $z = 3i$?

(a)$f(z) = \begin{cases} (z^2 + 9)/(z + 3i) & si\ z \neq 3i \\ 3i & si\ z = 3i \end{cases}$

(b)$f(z) = \begin{cases} (z^2 + 9)/(z - 3i) & si\ z \neq 3i \\ 6i & si\ z = 3i \end{cases}$

Solución

(a) $\dfrac{z^2+9}{z+3i} = \dfrac{(z+3i)(z-3i)}{z+3i} = z-3i$
Ahora observemos que $z_0 = 3i \ \in \ \ Dom\ f = \mathbb{C}$, veamos entonces si existe $\lim_{z\to 3i} f(z)$ y si es igual a $f(3i)$.
Si existiera el $\lim_{z\to 3i} f(z)$ sería igual a $\lim_{z\to 3i}(z-3i)$ pero $\lim_{z\to 3i}(z-3i)$ existe (por ser $g(z) = z-3i$ una función polinómica) y es O, pero como $f(3i) = 3i$ por definición, entonces f es discontínua en $z_0 = 3i$.
(b) $\dfrac{z^2+9}{z-3i} = \dfrac{(z+3i)(z-3i)}{z-3i} = z+3i$
Sabemos que $z_0 = 3i \ \in \ Dom\ f = \mathbb{C}$ como $f(3i) = 6i$ por definición y contínuidad existe $\lim_{z\to 3i} f(z) = \lim_{z\to 3i}(z+3i) = 6i$ por ser $g(z) = z+3i$ función polinómica. Resulta que existe $\lim_{z\to 3i} f(z) = f(3i) = 6i \Rightarrow f$ continua en $z_0 = 3i$

Problema 13
Hallar los puntos de discontinuidad de las funciones a continuación:
(a) $f(z) = \dfrac{z+2}{z^4-1}$
(b) $f(z) = \dfrac{3z-i}{z^2-z-6}$
(c) $f(z) = \dfrac{4z+i}{z^3+z^2+z+1}$
(d) $f(z) = \dfrac{4z+i}{e^x}, \ x \in \mathbb{R}$

Solución
(a) $z^4-1 = (z^2+1)(z^2-1) = (z+i)(z-i)(z+1)(z-1)$ como f es una función racional, los puntos de discontinuidad son los que anulan al denominador $\Rightarrow \{-i, i, -1, 1\}$
(b) $z^2-z-6 = (z-3)(z+2) \ \Rightarrow$ los puntos de discontinuidad son las raíces del denominador de la función racional f, esto es: $\{3, -2\}$.
(c) $z^3+z^2+z+1 = (z+1)(z^2+1)$, la raiz $z_0 = -1$ se puede conseguir por ensayo: $(-1)^3+(-1)^2+(-1)+1 = -1+1-1+1 = 0$
y luego se aplica la regla de Ruffini para dividir el polinomio z^3+z^2+z+1 entre el binomio $z+1$. Finalmente, al ser f racional $\Rightarrow \{-1, i, -i\}$ son los puntos de discontinuidad.
(d) Como $e^x \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ $f(z)$ es contínua para todo z por ser f función racional. Luego, no hay puntos de discontinuidad.

Problema 14
Demuestre que existe
$$\lim_{z\to i} \frac{z^3-z^2+4z-4}{z+1}$$
y expréselo en forma $a+bi$.

Solución
$f(z) = \dfrac{z^3-z^2+4z-4}{z+1} = \dfrac{(z^2+4)(z-1)}{z+1} = \dfrac{g(z)}{h(z)}$
$f(z)$ tiene límite excepto en $z = -1$ que es el punto que anula al denominador de la función racional. Finalmente por contínuidad
$$\lim_{z\to i} f(z) = \frac{(-1+4)(i-1)}{i+1} = \frac{3i-3}{1+i} = \frac{(3i-3)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$\frac{6i}{1+1} = 3i = a+bi$$
con $a = 0$ y $b = 3$

Capítulo 10

Funciones Elementales

Objetivos: Que el alumno amplíe su concepto de funciones elementales: $e^x,\ x^n,\ \log x,\ \operatorname{sen} x,\ \cos x,\ etc., x \in \mathbb{R}$ para llegar a las importantes definiciones de e^z, $\log z$, w^z, $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, $\operatorname{sen} hz$, $\cos hz$, ...etc., con $z \in \mathbb{C}$ y sus aplicaciones.

10.1 Introducción

Aquí hacemos una extensión de las funciones conocidas en cursos anteriores como "elementales", esto es, e^x, x^n, $\ln x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, etc., con $x \in \mathbb{R}$, al plano complejo. Sin embargo, primero vamos a dar nociones sobre las "propiedades geométricas de las funciones complejas". Sólo vamos a presentar algunos ejemplos simples, toda vez que el tema amerita más tiempo para exponerlo.
Dada $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ queremos estudiar en que transforma f a algunas curvas simples y regiones simples, así tendremos una idea de la manera en que "deforma al plano $\mathbb{C}$". El desarrollo de la idea lo haremos en los mismos Ejercicios.

10.2 Ejercicios sobre transformaciones

Problema 1
Hallar la imagen de la circunferencia dada por $|z| = 1$, según la transformación f; $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$

Solución
$z = x + iy \ \longrightarrow\ x + iy + \dfrac{1}{x+iy} = x + iy + \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$.

Por lo tanto $f(z) = f(x+iy) = \left(x + \dfrac{x}{x^2+y^2}\right) + i\left(y - \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$
Así que $|z| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = 1$ con $|x| \leq 1$ y $|y| \leq 1$ por ser circunferencia centro $(0,0)$, radio 1 es enviada por f en $u(x,y)+iv(x,y) = \left(x + \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)+i\left(y - \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$ pero como $x^2+y^2 = 1 \Rightarrow u(x,y) = 2x, v(x,y) = 0$ con $|x| \leq 1$, por lo tanto, $u \in [-2,2]$ y $v = 0(eje\, u)$. La imagen es el intervalo $[-2,2]$ en el eje u.

Problema 2
Sea $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = 1/z^2$, sea $S = \{x + iy \mid x \leq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \geq 1\}$
(a) Hallar la transformación de S por f.

(b) Resolver la ecuación $f\left(z + \dfrac{4}{z}\right) = \dfrac{1}{8}$.

Solución

(a) $z = x + iy \longrightarrow \dfrac{1}{z^2} = \dfrac{1}{(x+iy)^2} = \dfrac{1}{x^2 - y^2 + 2xyi} = \dfrac{x^2 - y^2 - 2xyi}{(x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2} = \dfrac{x^2 - y^2 - 2xyi}{(x^2+y^2)^2}$

Por tanto $u(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2},\ v(x,y) = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

Sin embargo el estudio de u y v no conduce a alguna idea aceptable (como en el ejercicio anterior) recurrimos entonces a la forma polar:

$\rho\ cis\theta \longrightarrow \frac{1}{z^2} = z^{-2} = \rho^{-2} cis(-2\theta)$

$\rho^2 = x^2 + y^2 \geq 1$, $\rho^{-2} = (x^2+y^2)^{-1} \leq 1$ puesto que en S, $z^2 + y^2 \geq 1$ y $\theta \in [\pi/2, \pi]$ lo cual se deduce de que en S, $x \leq 0, y \geq 0\ \Rightarrow$ 2do cuadrante. Por lo tanto $\pi/2 \leq \theta \leq \pi\ \Rightarrow\ \pi \leq 2\theta \leq 2\pi\ \Rightarrow -\pi \geq -2\theta \geq -2\pi$ ó $-2\theta \in [-2\pi, -\pi]$

Así que $f(S) = \{(\rho,\theta) \mid \rho \leq 1,\ -2\theta \in [-2\pi, -\pi]\}$

(b) $f\left(z + \dfrac{4}{z}\right) = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \dfrac{1}{(z+\frac{4}{z})^2} = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \dfrac{z^2}{z^4 + 8z^2 + 16} = \dfrac{1}{8}$

$\Leftrightarrow z^4 + 8z^2 + 16 = 8z^2 \Leftrightarrow z^4 = -16 \Leftrightarrow z = 2\sqrt[4]{-1} \Leftrightarrow z_0 = \sqrt{2}(1+i),\ z_1 = \sqrt{2}(-1+i),\ z_2 = \sqrt{2}(-1-i)\, z_3 = \sqrt{2}(1-i)$

Problema 3

Hallar la imagen de la familia de rectas de ecuaciones $y = x + b,\ b \neq 0$, bajo la transformación $f(z) = 1/z,\ z \neq O$.

Solución

$f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x - iy}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$, de modo que

$u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2};\ v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$

Ahora, $y = x + b \Rightarrow\ x - y = -b$.

Por lo tanto, sumando $u + v = \dfrac{x-y}{x^2+y^2} = -\dfrac{b}{x^2+y^2}$ otro además

$u^2 + v^2 = \dfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{1}{x^2+y^2} \Rightarrow\ u^2 + v^2 = -\dfrac{u+v}{b}$

Por lo que $b(u^2+v^2)+(u+v) = b(-\frac{u+v}{b})+(u+v) = 0$. Obsérvese que $b(u^2+v^2)+(u+v) = 0 \Rightarrow \left(u + \frac{1}{2b}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2b}\right)^2 = \frac{1}{2b^2}$

(Hemos "completado cuadrados") $\Rightarrow$ Familia de circunferencias con centros en los puntos $\left(-\dfrac{1}{2b}, -\dfrac{1}{2b}\right)$ con radios $\frac{1}{\sqrt{2}b}$.

Más adelante, al estudiar las "funciones elementales" se verán más ejercicios.

10.3 Funciones Elementales

A continuación presentamos un resumen sobre las "Funciones Elementales". Se extienden al plano complejo, las funciones elementales en $\mathbb{R}$: $e^x,\ x^n,\ \operatorname{sen} x,\ \cos x,\ \ln x,\ \sqrt[n]{x}$.

1. *Función Exponencial.*
   Sea $z = x + iy$, entonces se define $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^x\ cis(y)$. De modo que
   $Re\ e^z = u(x,y) = e^x \cos y$
   $Im\ e^z = v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$
   con Exp: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{O\} = \{z = x + iy \mid z \neq 0 + 0i\}$

En $C9 - Ejercicio(11)$ demostramos, que $e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$ es una función contínua en $\mathbb{C}$. Por lo tanto, la función Exp es contínua en $\mathbb{C}$.
Propiedades
(a) Para todo $z \in \mathbb{C},\ e^z \neq O = 0 + 0i$
(b) $|e^z| = e^{Re\ z} = e^x\ \ si\ \ z = x + iy$
(c) La exponencial es periódica con período $2\pi i$, es decir $e^z = e^{z+(2\pi i)n},\ \ n \in Z\ \ n$ es entero.
(d) $e^z = 1 \Leftrightarrow z = (2\pi i)n,\ \ n \in Z$
(e) $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$ para todo $Z, W \in \mathbb{C}$

Es inmediato comprobar como ejercicio que $e^O = 1,\ e^{\pi i/2} = i,\ e^{2\pi i/2} = -1, e^{-\pi i/2} = -i,$
y como $e^O = 1$ y $e^{(2\pi i)n} = 1$ queda probado que la Exponencial no es inyectiva $\Rightarrow$ no tiene inversa si definimos $Exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por eso cuando vayamos a definir $\log(z)$ tendremos que restringir el dominio $\mathbb{C}$ de Exp a un subconjunto de $\mathbb{C}$ en el cual Exp si sea inyectiva.
En los ejercicios veremos que hace Exp. sobre algunas regiones de $\mathbb{C}$.

2. *Función Logarítmica*
Hemos visto que $Exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{O\}$ no es inyectiva, por lo tanto para construir la función inversa ($\log$) vamos a restringir $Dom\ Exp$ a $A_{y0} = \{z = x + iy \mid z \in \mathbb{R}$ y $y \in [y_0, y_0 + 2\pi)\}$
Así Exp restringida en A_{y_0} se denota: $Exp|A_{y_0} : A_{y_0} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{O\}$
La imagen de la recta $z = x + iy_0$ es el semirayo de ángulo y_0 (excluído el origen). Ahora construímos la

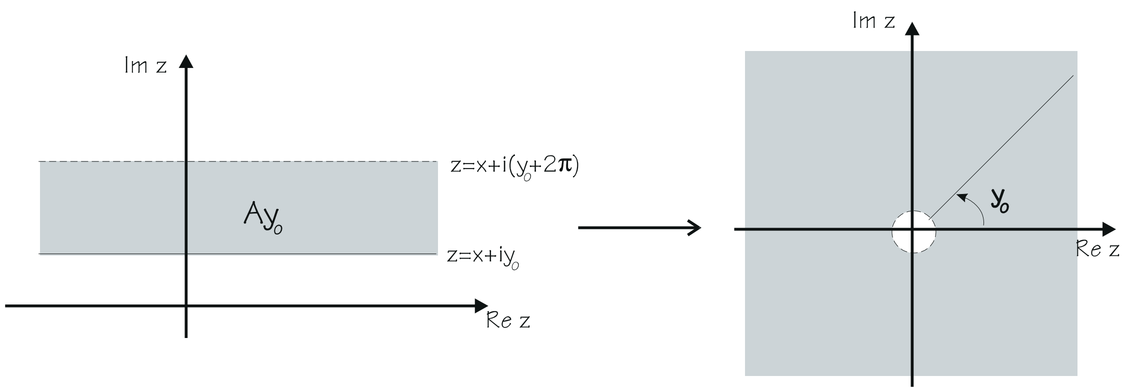


Figura 10.1: Transformación del Logaritmo

función $\log A_{y0}$ como
$\log_{A_{y0}} : \mathbb{C}\backslash\{O\} \longrightarrow A_{y_0} \subset \mathbb{C}$
$z \longrightarrow \log_{A_{y0}} z = \ln\rho + i\theta$
con $\theta \in [y_0, y_0 + 2\pi)$ y $\rho = |z|$
$\log_{A_{y0}} z$ se nombra como la rama principal de la función log con imágenes en la zona A_{y0}.
Entonces, $\log z$ está bien definido si especificamos un intervalo de longitud 2π donde $Arg\ z$ tome sus valores, es decir, si indicamos el valor y_0, tal que $Arg\ z \in [y_o, y_o + 2\pi)$.
Así que

$$\log_{A_{y0}} z = \log_{y0} z = \ln\rho + i(Arg\ z + 2k\pi)$$

con k elegido de tal modo que $Arg\ z + 2k\pi\ \ \in [y_0, y_0 + 2\pi)$. En el caso particular $y_0 = 0\ \Rightarrow\ Dom\ \log_0 = \mathbb{C}\{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in [0, 2\pi)\}$
Ahora bien, definida la $Exp|A_{y0}$ resulta que Exp es inyectiva pero $\log_{y0}$ es *discontínua* en su dominio $\mathbb{C}\backslash\{O\}$ puesto que la continuidad falla en la semirecta de ángulo y_0, es decir, la función Arg es discontínua en el semirayo.
Por ejemplo, $\log_{-\pi} z = \ln\rho + i(arg\ z + 2k\pi)$ con k escogido tal que $arg\ z + 2k\pi\ \ \in [-\pi, -\pi + 2\pi) = [-\pi, \pi)$.
Observemos la acción de la exponencial restringida a $A_{-\pi}$ (Ver figura 10.2)
Se observa la discontinuidad en la semirecta. Por lo tanto para que $\log_{-\pi}$ sea contínua quitamos del conjunto $Im\ e^z$ la semirecta de ángulo π y del Dominio de Exp la recta de ecuación $z = x - i\pi$

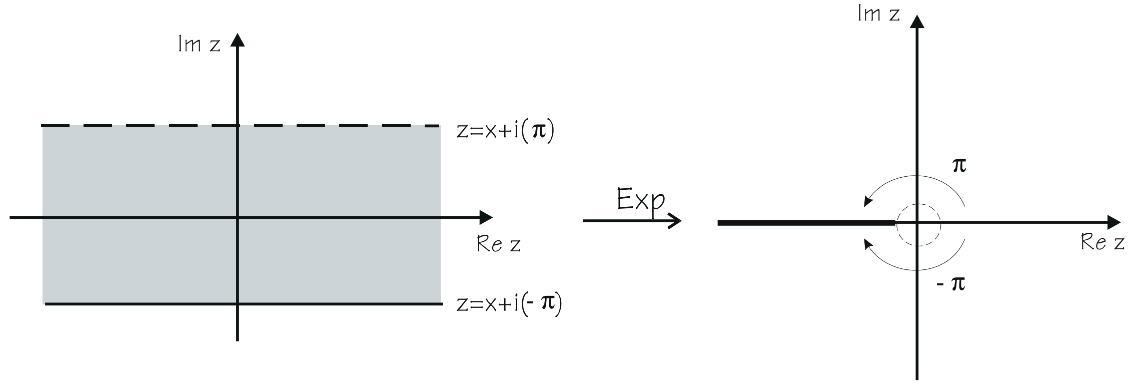


Figura 10.2:

Quedando entonces

$$\mathbb{C}\backslash\{z = x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in (-\pi, \pi)\} \overset{\log_{-\pi}}{\longrightarrow} A^*_{-\pi}$$

con $A^*_{-\pi} = \{z = u + iv \mid u \in \mathbb{R}, v \in (-\pi, \pi)\}$.
En general, $\log_{A_{y0}} = \log_{y_0}$ *es contínua* si la definimos como:

$$\log_{y0} : \mathbb{C}\backslash\{rayo\; y_0\} \to \{u + iv \mid u \in \mathbb{R}, v \in (y_0, y_0 + 2\pi)\}$$

y la misma restricción se toma para derivabilidad de $\log_{y_0}$ (la veremos más adelante), en el caso $y_0 = -\pi$, $\log_{-\pi}$ se denomina rama principal de $\log$ y se denota Log.
De modo que $Log : \mathbb{C}\backslash\{O\} \longrightarrow A_{-\pi}$ y para que Log sea contínua cambiamos a
$Log\ : \mathbb{C}\backslash\{x + iy \mid y = 0, x \leq 0\} \longrightarrow A^*_{-\pi}$
con $A^*_{-\pi} = \{u + iv \mid u = \ln\rho, v \in (-\pi, \pi)\}$
Una de las propiedades más importantes de $\log_{y_0}$ es que

$$\log_{y_0}(z_1 \cdot z_2) = \log_{y_0} z_1 + \log_{y_0} z_2 + 2k\pi i$$

con z_1, z_2 cualesquiera $\in\ \mathbb{C}$ y k entero.

3. *Potencia Compleja*
   Sean $w, z\ \in \mathbb{C}$, dependiendo de la rama de $\log$ que se tome, definimos
   $w^z = e^{z\cdot\log_{y0} w} e^{z(2k\pi)i},\ \ k \in Z$

4. *Función Raiz Enésima*
   Sea $\sqrt[n]{\ }:\ \begin{array}{l} A_{y0} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longrightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \end{array}$
   $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$
   con $\theta =$argumento principal de z.
   Esto se deduce de la siguiente definición:
   $\sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n}log_{y0} z} = e^{\frac{1}{n}(\ln\rho + i(\theta+2k\pi))} = \sqrt[n]{\rho}e^{i(\theta+2k\pi)/n},\ \ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$
   Luego $\sqrt[n]{z}$ depende de la rama de $\log$ que se escoja. Es común elegir $y_0 = -\pi \Rightarrow \log_{-\pi} = Log$ y $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}e^{\frac{i\theta}{n}},\ \ \theta \in (-\pi, \pi)$

5. *Funciones Trigonométricas*
   Recordemos que $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ y $e^{-iy} = \cos(-y) + i \operatorname{sen}(-y) = \cos y - i \operatorname{sen} y$
   Sumando $\Rightarrow\ \cos y = \dfrac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$
   Restando $\Rightarrow\ \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy})$

Se define entonces

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

$\left\{ \begin{array}{l} \tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \\ \cos z \neq 0 \end{array} \right.$, $\left\{ \begin{array}{l} \cot z = \frac{1}{\tan z} \\ \operatorname{sen} z \neq 0 \end{array} \right.$, $\left\{ \begin{array}{l} \sec z = \frac{1}{\cos z} \\ \cos z \neq 0 \end{array} \right.$, $\left\{ \begin{array}{l} \csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z} \\ \operatorname{sen} z \neq 0 \end{array} \right.$,

Propiedades Básicas (se dejan como ejercicios)

(a) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$

(b) $\cos(z \pm w) = (\cos z)\cos w \mp (\operatorname{sen} z)\operatorname{sen} w$

(c) $\operatorname{sen}(z \pm w) = (\operatorname{sen} z)\cos w \pm (\operatorname{sen} w)\cos z$

(d) Las funciones trigonométricas extendidas a $\mathbb{C}$ son funciones contínuas en su dominio (lo cual se deduce hallando parte real y parte imaginaria, y utilizando el Teorema correspondiente)

6. *Funciones Hiperbólicas*
Para $x \in \mathbb{R}$, se definen

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}); \quad \operatorname{senh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

La identidad fundamental va a ser:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

Además $d(\operatorname{senh} x)/dx = \cosh x$ pero $d(\cosh x)/dx = \operatorname{senh} x$.
Obsérvese que $|\cosh x| \geq 1$ pero $\operatorname{senh} x$ no es función acotada. Además $\cosh x$ y $\operatorname{senh} x$ nunca se cortan

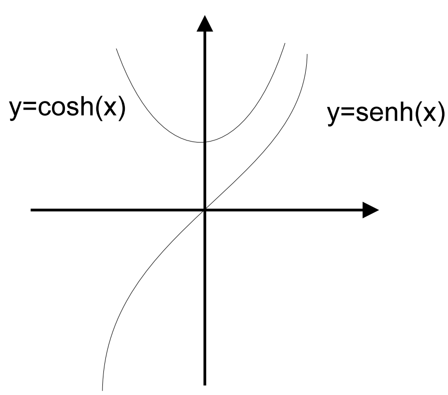


Figura 10.3:

$\Rightarrow \cosh x \neq \operatorname{senh} x$ para todo x real.
Ahora bien, para $z \in \mathbb{C}$,

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}); \quad \operatorname{senh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

y por analogía con las funciones trigonométricas se definen:

$\left\{ \begin{array}{l} \tanh z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z} \\ \cosh z \neq 0 \end{array} \right.$, $\left\{ \begin{array}{l} \coth z = \frac{1}{\tanh z} \\ \operatorname{senh} z \neq 0 \end{array} \right.$, $\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z} \\ \cosh z \neq 0 \end{array} \right.$, $\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{senh} z} \\ \operatorname{senh} z \neq 0 \end{array} \right.$,

La propiedad más importante es

$$\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$$

y de la definición dada por exponenciales, se tiene las representaciones en series:

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$
$$\operatorname{senh} z = 1 + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

Dos propiedades básicas son:
$\cos iy = \cosh y$
$\operatorname{sen} iy = i \operatorname{senh} y$
con $y \in \mathbb{R}$, las cuales se deducen fácilmente utilizando las fórmulas
$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ y
$\operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ con $z = iy$
y las definiciones
$\cosh y = \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y})$ y
$\operatorname{senh} y = \frac{1}{2}(e^{y} - e^{-y})$

10.4 Ejercicios Resueltos

Problema 4

Estudiar en detalle la función $\begin{array}{l} f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longrightarrow f(z) = z^2 \end{array}$

Solución

Para $n = 2,\ \ z \longrightarrow z^2 = (x + iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + \underbrace{(2xy)}_{v(x,y)} i$

Sabemos por el Teorema $4 - C9$ que al ser $u\&v$ funciones polinómicas en $\mathbb{R}^2$, por lo tanto contínuas en $\mathbb{R}^2$ será f contínua en $\mathbb{C}$.

Ahora un complejo cualquiera $z = x + iy$ o en forma polar $z\rho cis(\theta) \longrightarrow \rho^2 cis(2\theta)$

El efecto de la función es elevar al cuadrado el módulo de z y duplicar su ángulo.

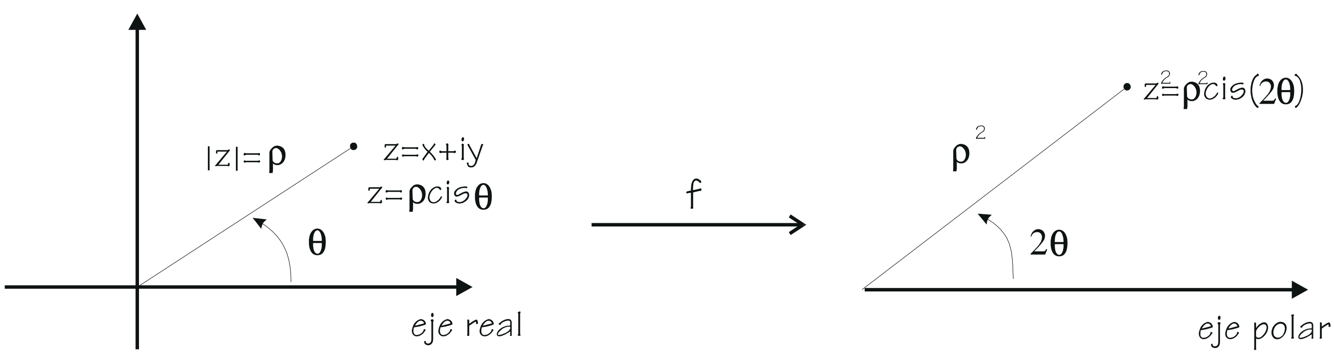


Figura 10.4:

(En caso $n = 3$, eleva al cubo el módulo y triplica el argumento, etc.)

Problema 5

Transformación de $Re\ z \geq 0,\ \ Im\ z \geq 0$ por $f(z) = z^2$? Es biyectiva?.

Solución

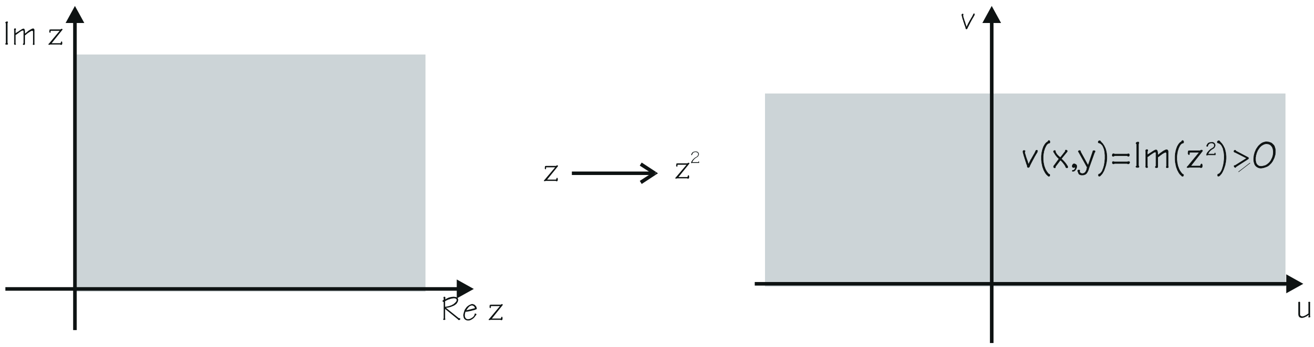


Figura 10.5:

El primer cuadrante del plano complejo lo transforma al semiplano superior. Además tal transformación es biyectiva. (Ver figura 10.5)

Problema 6
Transformación de $Im\ z \geq 0$ por $f(z) = z^2$. Es biyectiva?

Solución
La transformación no envía inyectivamente a $Im\ z \geq 0$ en $\mathbb{C}$ toda vez que por ejemplo a los puntos $-a + 0i$ y $a + 0i$

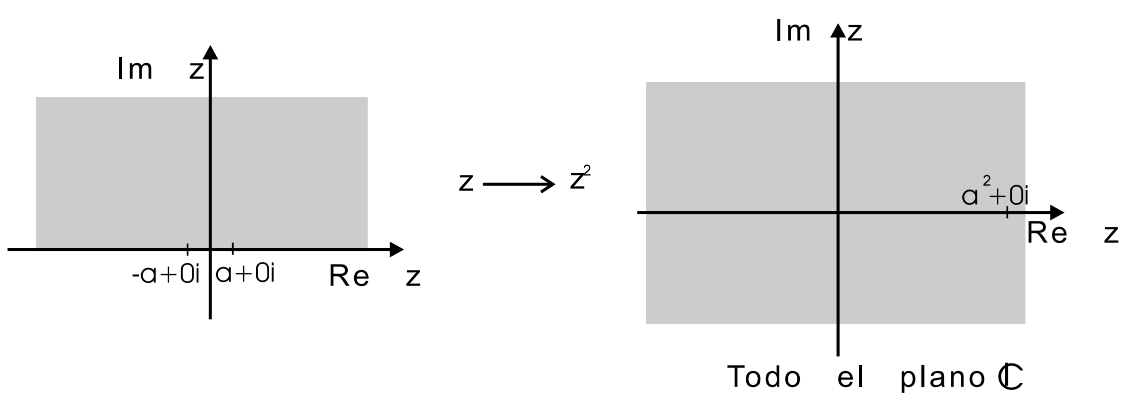


Figura 10.6:

los envía en $a^2 + 0i$. Luego en este ejercicio no actúa biyectivamente.

Problema 7

Sea $\begin{array}{l} f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \backslash \{O\} \\ z \longrightarrow f(z) = e^z \end{array}$

(a) Transformación de $\{z \mid Im\ z = 0\} = eje\, x$
(b) Transformación de $\{z \mid Re\ z = 0\} = eje\, y$
(c) Transformación de la franja entre dos rectas paralelas al eje imaginario.
(d) Transformación de la franja entre el eje real y la recta $z = x + ib,\ \ b$ fijo real.
(e) Transformación de la franja entre dos rectas paralelas al eje real con: $z = x + ib_1;\ z = x + ib_2,\ b_2 - b_1 < 2\pi$
(f) Transformación de la franja entre dos rectas paralelas al eje real con: $z = x + ib_1;\ z = x + ib_2,\, b_2 - b_1 = 2\pi$

Solución
(a)
Aquí $z = x + 0i \longrightarrow e^z = e^x > 0$.

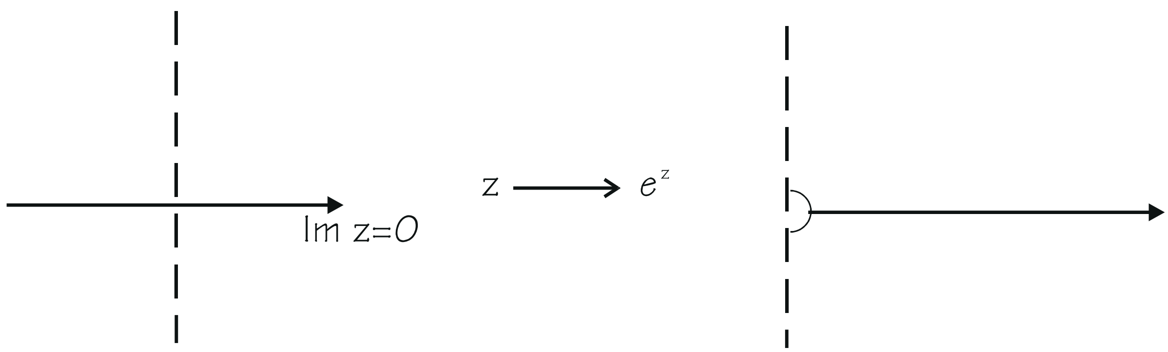


Figura 10.7: Solución Parte a. Problema 7

(b)
$z = 0 + iy \longrightarrow e^z = e^{iy} = \cos y + i\, \text{sen}\, y$. Por lo tanto $\rho = 1 = x^2 + y^2$.

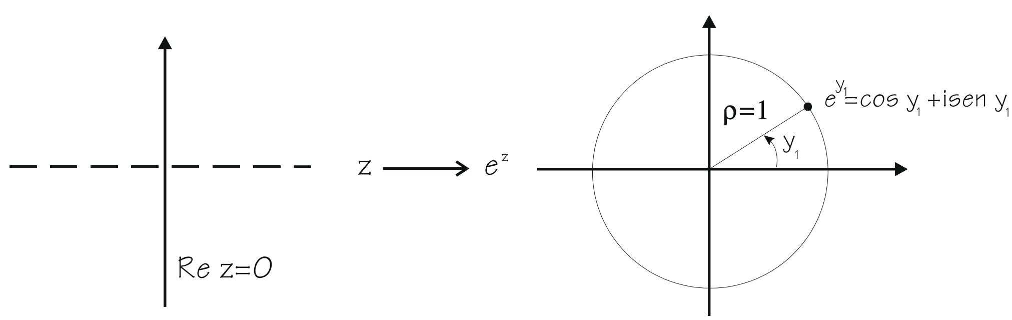


Figura 10.8: Solución Parte b. Problema 7. $x^2 + y^2 = 1$ o e^{iy}

Las soluciones de las partes (c) y (d) están en la página 123, mientras que las de (e) y (f) están en la 124.

Problema 8
Hallar $Log(2\sqrt{3} + 2i)$

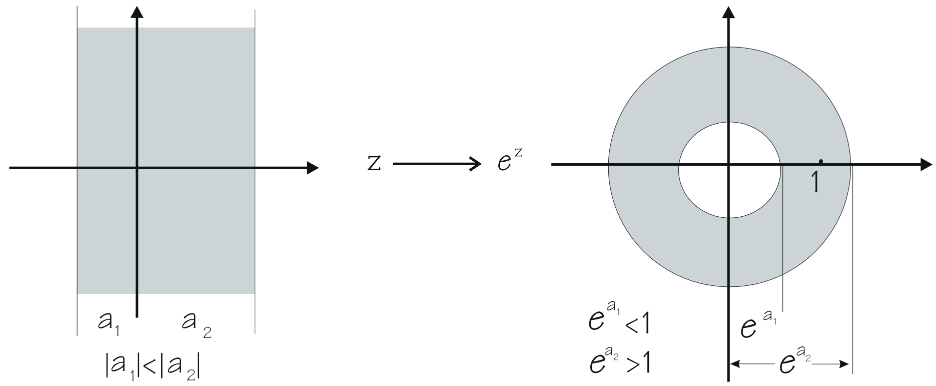


Figura 10.9: Solución Parte c. Problema 7

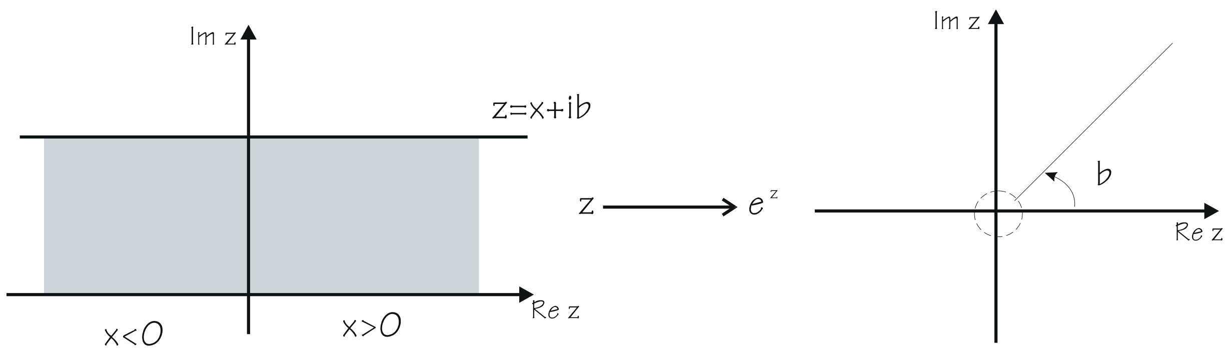


Figura 10.10: Solución Parte d. Problema 7

Solución

$Log(2\sqrt{3}+2i) = \log_{-\pi}(2\sqrt{3}+2i) = \ln\rho + i(\theta + 2k\pi)$ con $\theta + 2k\pi \in [-\pi, \pi)$

Ahora, $|z| = \rho = \sqrt{4\cdot 3 + 4} = 4$

z está en el primer cuadrante ya que $a = 2\sqrt{3} > 0$ y $b = 2 > 0$.

Por tanto,$\theta = \tan^{-1}(\frac{2}{2\sqrt{3}}) = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\pi}{6}$

Debemos hallar k tal que $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \in [-\pi, \pi)$.

Es obvio que con $k = 0$, $\frac{\pi}{6} \in [-\pi, \pi)$. Por tanto $Log(2\sqrt{3}+2i) = \ln 4 + i\frac{\pi}{6} = 2\ln 2 + \frac{\pi}{6}i$

Otros cálculos de logaritmos complejos a sugerir son:

(a)$Log(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}, \quad (k=0)$

(b)$Log i = i\frac{\pi}{2}$

(c)$\log_{\frac{\pi}{2}}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{9\pi}{4}, \quad (k = 1, \theta = \frac{\pi}{4})$.

Problema 9

Hallar las determinaciones de $\log_{y_0}(-2+2\sqrt{3}i)$ (desconocido y_0) para $k = -1, 0, 1$.

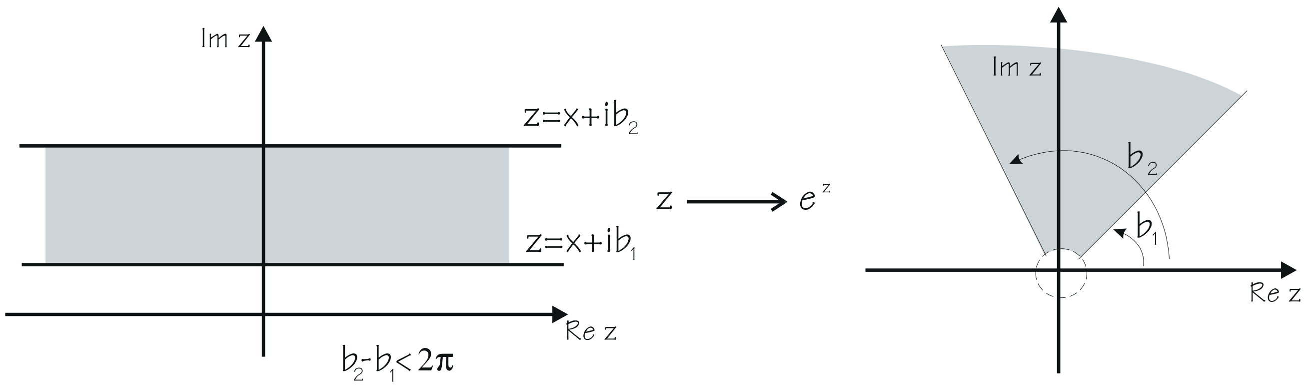


Figura 10.11: Solución Parte e. Problema 7

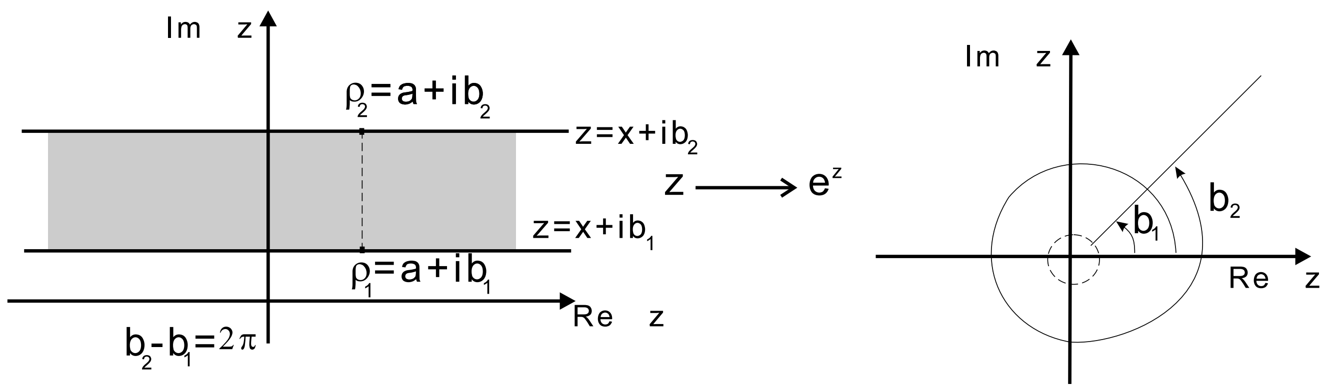


Figura 10.12: Solución Parte f. Problema 7

Solución

$\rho = |z| = \sqrt{4+12} = 4,\ \ \theta = \tan^{-1}\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ pero como z está en el segundo cuadrante por ser $a = -2 < 0$ y $b = 2\sqrt{3} > 0,\ \ arg\ z = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Por tanto $\log_{y_0} z = 2\ln 2 + i(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi)$ no conocemos y_0 pero nos indican los valores de k en el ejercicio.

$k = -1 \Rightarrow 2\ln 2 + i(\frac{-4\pi}{3})$

$k = 0 \Rightarrow 2\ln 2 + i(\frac{2\pi}{3})$

$k = 1 \Rightarrow 2\ln 2 + i(\frac{8\pi}{3})$

Problema 10

Calcular $\log_{-2\pi}(-2 + 2\sqrt{3}i)$

Solución

Aquí $\rho = |z| = 4,\ \ \theta = \frac{\pi}{3},\ arg\ z = \frac{2\pi}{3}$

Hemos de elegir k tal que $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\ \in [-2\pi, 0) = I$

$k = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{3} + 2\cdot 0\cdot \pi = \frac{2\pi}{3}\ \ \notin I$

$k = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}\ \ \notin I$

$k = -1 \Rightarrow \frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3}\ \ \in\ I$

puesto que $-2\pi < -\frac{4\pi}{3} < 0$.

Problema 11
Calcular $\log_0(-2+2\sqrt{3}i)$

Solución
$\log_0 z = 2\ln 2 + i\frac{2\pi}{3} \quad (k=0)$

Problema 12
Demuestre que:
(a) $Log(5+3i) = \ln\sqrt{34} + i(\tan^{-1}\frac{3}{5})$
(b) $\log(\sqrt{3}-i) = \ln 2 + i(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi)$
(c) $\log(-\sqrt{3}-i) = \ln 2 + i(-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi)$

Solución
Estos tres ejercicios quedan como practica para el estudiante.

Problema 13
Hallar $\log z$ con $z = 1-i$ con valores en la franja entre $y = -\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$.

Solución
$y_0 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow\ y_0 + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$, $z \in$ cuarto cuadrante ya que $\theta = -\pi/4$.
$\log_{-\frac{\pi}{2}}(1-i) = \ln\sqrt{2} + i(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$
Debemos hallar k tal que $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\ \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$
Observar que eso se consigue con $k=0$
Por tanto $\log_{-\frac{\pi}{2}}(1-i) = \ln\sqrt{2} + i(-\frac{\pi}{4})$

Problema 14
Demuestre que:
(a) $\log_{\frac{\pi}{2}}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{9\pi}{4} \quad (k=1)$
(b) $Log(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} \quad (k=0)$
(c) $\log_{-\pi}(-2+2\sqrt{3}i) = 2\ln 2 + i\frac{2\pi}{3} \quad (k=0)$
(d) $Log(1-i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{-\pi}{4} \quad (k=0)$
(e) $\log 1 = (2k\pi)i$ (sin especificar y_0)
(f) $\log(-1) = (\pi + 2k\pi)i$ (sin especificar y_0)
(g) $Log 1 = 0 \quad (k=0)$
(h) $Log(-1) = -\pi i \quad (k=-1)$

Solución
Ejercicios para el estudiante.

Problema 15
Hallar parte real y parte imaginaria para
(a)$\cos z$; (b) $\operatorname{sen} z$

Solución
(a)$\cos z = \cos(x+iy) = (\cos x)\cos(iy) - (\operatorname{sen} x)\operatorname{sen}(iy) =$
$= (\cos x)\cosh y - i(\operatorname{sen} x)\operatorname{senh} y$
$\Rightarrow u(x,y) = (\cos x)\cosh y,\ \ v(x,y) = -(\operatorname{sen} x)\operatorname{senh} y$
(b)$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x+iy) = (\operatorname{sen} x)\cos(iy) + (\operatorname{sen}(iy))\cos x =$
$= (\operatorname{sen} x)\cosh y + i(\operatorname{senh} y)\cos x$
$\Rightarrow u(x,y) = (\operatorname{sen} x)\cosh y,\ \ v(x,y) = (\cos x)\operatorname{senh} y$

Problema 16
Hallar $Re\ \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}i);\ \ Im\ \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}i)$

Solución
$\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}i) = (\cos\frac{\pi}{2})\cosh(\frac{\pi}{4}) - i(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2})\operatorname{senh}(\frac{\pi}{4}) =$
$-i\operatorname{senh}\frac{\pi}{4} \Rightarrow u(x,y) = 0,\ \ v(x,y) = -\operatorname{senh}\frac{\pi}{4}$

Problema 17
Demuestre que para $z = 1 - \frac{3\pi}{2}i$
$Re\ \operatorname{sen} z = (\operatorname{sen} 1)\cosh\frac{3\pi}{2};\ \ Im\ \operatorname{sen} z = -(\cos 1)\operatorname{senh}\frac{3\pi}{2}$

Solución
Se deja al alumno la demostración.

Problema 18
Demuestre que $\cos\overline{z} = \overline{\cos z}$

Solución
$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ \ \cos\overline{z} = \dfrac{e^{i\bar{z}} + e^{-i\bar{z}}}{2} = \dfrac{e^{\overline{-iz}} + e^{\overline{iz}}}{2}$ ya que $\overline{-i} = i$ y $-i = \bar{i}$. Finalmente, $\overline{cosz} = \frac{1}{2}(e^{\overline{-iz}} + e^{\overline{iz}})$. De hecho $e^{\overline{z}} = \overline{e^{z}}$

Problema 19
Resolver las ecuaciones siguiente: (a)$\cos z = 3$
(b)$\cos z = 2;\quad \operatorname{sen} z = 2$
(c)$e^{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$
(d)$\operatorname{sen} x = i$
(e)$\operatorname{sen} z + \cos z = 2$
(f)$|\tan z| = 1$
(g)$\operatorname{sen} z = 2i\cos z$ (Hallar solución en forma $x+iy$)
(h)$\cos z = 5i\operatorname{sen} z$ (Hallar solución en forma $x+iy$)
(i)$z - \frac{1}{z} = Log(-1)$
(j)$\operatorname{senh} z = -i$
(k)$\operatorname{sen} z = \cosh 4$
(l)$\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(2z)] - 2\operatorname{sen} z = -2 + \cos z$
(m)$\operatorname{sen}^2 z = -4$

Solución

(a)Vamos a explicar un procedimiento muy utilizado:
$\cos z = 3 \Rightarrow \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}) = 3 \Rightarrow e^{iz}+e^{-iz} = 6 \Rightarrow e^{iz}+e^{-iz} = 6 \Rightarrow e^{2iz}-6e^{iz}+1 = 0$. Hacer $w = e^{iz} \Rightarrow w^2-6w+1 = 0 \Rightarrow w = 3\pm 2\sqrt{2} = e^{iz} \Rightarrow iz = \log(3\pm 2\sqrt{2})$ (con y_0 desconocido)$\Rightarrow iz = \ln|3\pm 2\sqrt{2}| + i(0+2k\pi)$
$z = 2k\pi - i\ln|3\pm 2\sqrt{2}|$. Observe que $3-2\sqrt{2} \approx 0,171572 > 0$.

(b)$\cos z = 2$. Aquí vamos a hacerlo por dos procedimientos. Un primer procedimiento es:
$\cos(x+iy) = (\cos x)\cosh y - i(\operatorname{sen} x)\operatorname{senh} y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x)\cosh y = 2 \\ (\operatorname{sen} x)\operatorname{senh} y = 0 \end{cases}$ Para la parte imaginaria, debería cumplirse:
$\operatorname{sen} x = 0$ o $\operatorname{senh} y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \cosh y = 1 \Rightarrow \cos x = 2$ (lo cual es absurdo).
Suponer entonces $\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in Z$, pero como $\cosh y > 0$, para que $2 = (\cos x)\cosh y$ deberá ser $\cos x > 0$ y como $x = k\pi$ para $\operatorname{sen} x = 0$, ahora será $x = k\pi$ con k entero par, por ejemplo, $x = 2m\pi$. Por tanto $\cos x = 1$ y $\cosh y = 2 = \frac{e^y+e^{-y}}{2} \Rightarrow e^{2y}-4e^y+1 = 0 \Leftrightarrow e^y = 2\pm\sqrt{3} \Leftrightarrow y = \log(2\pm\sqrt{3})$
Por tanto, $z = 2m\pi + i\ln|2\pm\sqrt{3}|,\ m \in Z$.
Otro procedimiento (que fué utilizado en (a)):
$\cos z = 2 = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \Leftrightarrow e^{2iz}-4e^{iz}+1 = 0,\ \{e^{iz} = w \Leftrightarrow w = \frac{4\pm 2\sqrt{3}}{2} = 2\pm\sqrt{3} = e^{iz} \Leftrightarrow iz = \log(2\pm\sqrt{3}) = \ln|2\pm\sqrt{3}| + i(0+2k\pi) \Leftrightarrow -z = 2k\pi - i\ln|2\pm\sqrt{3}| = 2k\pi + i\ln|2\mp\sqrt{3}|$
puesto que $-\ln|2\pm\sqrt{3}| = \ln|2\pm\sqrt{3}|^{-1} = \ln|2\mp\sqrt{3}|$ ya que $\frac{1}{2\pm\sqrt{3}} = \frac{2\mp\sqrt{3}}{4-3} = 2\mp\sqrt{3}$ (Este resultado es sólo coincidencia, no es propiedad).
Ahora $\operatorname{sen} z = 2 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2}+2k\pi - i\ln|2\pm\sqrt{3}|$ Lo que se debe evitar es usar procedimientos como elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación ya que se pueden introducir raíces extrañas.

(c)$e^z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Su solución es:
$z = \log\frac{1+i}{\sqrt{2}} = (\frac{\pi}{4}+2k\pi)i$ (Compruébelo).

(d) $\operatorname{sen} x = i$
$\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i} = i \Leftrightarrow (e^{xi})^2+2e^{xi}-1 = 0$. Hacer $w = e^{xi} \Rightarrow w^2+2w-1 = 0 \Rightarrow w = -1\pm\sqrt{2} = e^{xi} \Leftrightarrow xi = \log(-1\pm\sqrt{2}) = \ln|-1\pm\sqrt{2}| + i(\theta+2k\pi) \Leftrightarrow \begin{cases} xi = \ln(\sqrt{2}-1)+i2k\pi \\ xi = \ln(\sqrt{2}+1)+i(\pi+2k\pi) \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} -x = i\ln(\sqrt{2}-1)-2k\pi \\ -x = i\ln(\sqrt{2}+1)-\pi(1+2k) \end{cases} \Leftrightarrow$
$x = 2k\pi - i\ln(\sqrt{2}-1)$ ó $x = \pi(1+2k) - i\ln(\sqrt{2}+1)$

(e) $\operatorname{sen} z + \cos z = 2$
$\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}+\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 2 \Leftrightarrow (1+i)e^{2iz}-4ie^{iz}+i-1 = 0$. Hacer $w = e^{iz} \Rightarrow (1+i)w^2-4iw+i-1 = 0 \Rightarrow w = \frac{2i\pm i\sqrt{2}}{1+i} \Leftrightarrow w = \frac{(2\pm\sqrt{2})i}{1+i} = \frac{(2\pm\sqrt{2})i(1-i)}{2} = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}(1+i) = e^{iz} \Leftrightarrow iz = \ln\frac{2\sqrt{2}\pm 2}{2} + (\frac{\pi}{4}+2k\pi)i \Leftrightarrow iz = \ln(\sqrt{2}\pm 1) + (\frac{\pi}{4}+2k\pi)i \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{4}+2k\pi - i\ln(\sqrt{2}\pm 1)$
Sin embargo, $\ln(\sqrt{2}-1) = \ln(\sqrt{2}+1)^{-1} = -\ln(\sqrt{2}+1)$ puesto que $\sqrt{2}-1 = (\sqrt{2}-1)\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{2-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$
Por lo tanto podemos poner

$$z = \frac{\pi}{4}+2k\pi \pm i\ln(\sqrt{2}+1), \quad k \in Z$$

Otra forma de resolución es
$\operatorname{sen} z + \cos z = \operatorname{sen}(x+iy) + \cos(x+iy) =$
$[(\operatorname{sen} x)\cosh y + i(\operatorname{senh} y)\cos x] + [(\cos x)\cosh y - i(\operatorname{sen} x)\operatorname{senh} y] = 2 \Leftrightarrow$

$$(\operatorname{sen} x)\cosh y + (\cos x)\cosh y = 2 \quad (I)$$

$$(\cos x)\operatorname{senh} y - (\operatorname{sen} x)\operatorname{senh} y = 0 \quad (II)$$

De (II) $(\operatorname{senh} y)(\cos x - \operatorname{sen} x) = 0 \begin{cases} \operatorname{senh} y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \\ \cos x = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}+k\pi,\ k \in Z \end{cases}$
Si $y = 0$ en (I),$\cosh 0 = 1,\ \ \operatorname{sen} x + \cos x = 2$ lo cual es imposible.

Si $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z$ en (I) queda:
$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}+k\pi)\cosh y+\cos(\frac{\pi}{4}+k\pi)\cosh y=2\Rightarrow(\cosh y)[\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}+k\pi)+\cos(\frac{\pi}{4}+k\pi)]=2$
Luego, $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}+k\pi)=(-1)^n\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos(\frac{\pi}{4}+k\pi)$
$\Rightarrow\cosh y=(-1)^n\sqrt{2}\Rightarrow n$ debe ser par puesto que $\cosh y$ siempre es ≥ 1. Por tanto $\cosh y=\sqrt{2}\Rightarrow e^y+e^{-y}=2\sqrt{2}\Rightarrow e^{2y}-2\sqrt{2}e^y+1=0\Rightarrow e^y=\sqrt{2}\pm 1\Rightarrow y=\log(\sqrt{2}\pm 1)$. Pero $\ln(\sqrt{2}-1)=\ln(\sqrt{2}+1)^{-1}=-\ln(\sqrt{2}+1)\Rightarrow$
$z=(\frac{\pi}{4}+2k\pi)\pm i\ln(\sqrt{2}+1),\ \ k\in Z$
(f)$|\tan z|=1$
$\left|\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}\right|=1\Leftrightarrow|\operatorname{sen} z|^2=|\cos z|^2\Leftrightarrow$
$|(\operatorname{sen} x)\cosh y+i(\cos x)\operatorname{senh} y|^2=|(\cos x)\cosh y-i(\operatorname{sen} x)\operatorname{senh} y|^2$
$\Leftrightarrow(\operatorname{sen}^2 x)\cosh^2 y+(\cos^2 x)\operatorname{senh}^2 y=(\cos^2 x)\cosh^2 y+(\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{senh}^2 y$
$(\cosh^2 y)(\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x)=(\operatorname{senh}^2 y)(\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x)$
$\Leftrightarrow\operatorname{sen}^2 x=\cos^2 x$ (puesto que $\cosh^2 y\neq\operatorname{senh}^2 y$ siempre) $\tan^2 x=1\Leftrightarrow\tan x=\pm 1\Leftrightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}=\frac{4k+1}{4}\pi$

$$z=\frac{4k+1}{4}\pi+iy,\quad y\in\mathbb{R}$$

(g)$\operatorname{sen} z=2i\cos z$
$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=2i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\Rightarrow 3e^{2iz}+1=0\Rightarrow e^{2iz}=-\frac{1}{3}\Rightarrow 2iz=\log(-\frac{1}{3})=\ln\frac{1}{3}+i(\pi+2k\pi)=-\ln 3+i\pi(1+2k)$

$$z=\frac{\pi}{2}(1+2k)+\frac{i}{2}\ln 3$$

(h) $\cos z=5i\operatorname{sen} z$

$$z=k\pi-i\ln\sqrt{\frac{3}{2}}=k\pi-\frac{i}{2}\ln\frac{3}{2}$$

(i) $z-\frac{1}{z}=\log(-1)$

$$z=-\frac{i}{2}(\pi\pm\sqrt{\pi^2-4})$$

(j) $\operatorname{senh} z=-i$
$\frac{e^z-e^{-z}}{2}=-i\Leftrightarrow e^{2z}+2ie^z-1=0$
Hacer $w=e^z,\ \ w=-i=e^z\Rightarrow z=\log(-i)$

$$z=i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)=\pi(2k-\frac{1}{2})i$$

(k) $\operatorname{sen} z=\cosh 4$

$$z=(2k+\frac{1}{2})\pi\pm 4i$$

(l) $\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(2z)]-2\operatorname{sen} z=-2+\cos z$
$\frac{1}{2}2\operatorname{sen} z\cos z-2\operatorname{sen} z=\cos z-2\Rightarrow(\operatorname{sen} z)(\cos z-2)=\cos z-2$
Si $\cos z-2\neq 0,\ \ \operatorname{sen} z=1=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=1\Rightarrow e^{2iz}-2ie^{iz}-1=0\Rightarrow$
$w^2-2iw-1=0\quad w=i=e^{iz}\Rightarrow iz=\log i=i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)\Rightarrow$

$$z=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

(m) $\operatorname{sen}^2 z=-4$
$\operatorname{sen} z=\pm 2i\Leftrightarrow\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\pm 2i$

$$e^{2iz}\pm 4e^{iz}-1=0\ \ \begin{cases} iz=\log(-2\pm\sqrt{5})\\ iz=\log(2\pm\sqrt{5})\end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} iz = \ln(\sqrt{5}-2) + i2k\pi \Rightarrow -z = -2k\pi + i\ln(\sqrt{5}-2) \\ iz = \ln(2+\sqrt{5}) + i\pi(1+2k) \Rightarrow -z = -\pi(1+2k) + i\ln(2+\sqrt{5}) \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$z = 2k\pi - i\ln(\sqrt{5}-2), \;\; z = \pi(2k+1) - i\ln(\sqrt{5}+2)$$

Problema 20
Calcular las potencias complejas a continuación:
(a) i^{-2i}
(b) $(1+i)^i$
(c) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$
(d) i^i
(e) $(-i)^i$
(f) $(-1)^i$

Solución
(a) $i^{-2i} = e^{z\log w} e^{(2k\pi z)i}$ $\{z = -2i \; w = i \Rightarrow i^{-2i} = e^{-2iLogi} e^{2k\pi i(-2i)}$; $Logi = i\frac{\pi}{2}$. Por tanto $i^{-2i} = e^{-2i(i\frac{\pi}{2})} e^{4k\pi} = e^{\pi(4k+1)}$
(b) $(1+i)^i = e^{i(\log\,(1+i)} e^{i(2k\pi i)}$ $\{z = i \; w = 1+i \Rightarrow (1+i)^i = e^{i(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}i)} e^{2k\pi i^2} = e^{\frac{i}{2}\ln 2} e^{-\pi(-2k+\frac{1}{4})}$
(c) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i} = e^{(1+i)(-\frac{\pi}{4}i)} e^{2k\pi i - 2k\pi} = e^{\pi(2k+\frac{1}{4})} e^{-\pi(-2k+\frac{1}{4})i}$
(d) $i^i = e^{\pi\frac{4k+1}{2}}$ Compruébelo.
(e) $(-i)^i = e^{\frac{\pi}{2}-2k\pi}$
(f) $(-1)^i = e^{-\pi(2k+1)}$

Problema 21
Cuál es la imagen de la recta dada por $z = x + 5i$ por la transformación: $z \longrightarrow f(z) = \operatorname{sen} z$

Solución
$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x+5i) = (\operatorname{sen} x)\cosh(5) + i(\cos x)\operatorname{senh}(5)$ con $u(x,y) = (\operatorname{sen} x)\cosh(5), \;\; v(x,y) = (\cos x)\operatorname{senh}(5)$, ahora es intuitivo $\dfrac{u^2}{\cosh^2(5)} + \dfrac{v^2}{\operatorname{senh}^2(5)} = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2} = 1$ que representa a una Elipse de centro el origen y semiejes $a = \cosh(5), \;\; b = \operatorname{senh}(5)$, respectivamente.

Problema 22
Sea P un polígono regular de 6 lados, inscrito en la circunferencia $\mathcal{C} = \{z \mid |z| = 1\}$.
Si $z_0 = e^{i\frac{\pi}{5}}$ y los vértices de P son $z_0, z_1, \ldots, z_5$, ordenados en C en sentido antihorario, halle z_2.

Solución
Como P es un poligono regular de 6 lados, inscrito en $\mathcal{C}$, las $\hat{z_k}$ son las raíces de la ecuación $z^6 = 1 \Rightarrow z = \sqrt[6]{1} \Leftrightarrow$
$z_k = cis\frac{\theta+2k\pi}{6} = cis\frac{0+2k\pi}{6} = cis\frac{k\pi}{3}$
$\hat{z_k} = e^{i\frac{k\pi}{3}}, \;\; k = 0,1,2,\ldots,5$. Por tanto $\hat{z_0} = e^0 = 1$ y $z_k = e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot \hat{z_k}, \; k = 0,1,\ldots,5$.
Ahora, $\hat{z_0} = 1, \; \hat{z_1} = e^{i\frac{\pi}{3}}, \; \hat{z_2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$
Por tanto $z_2 = e^{i\frac{\pi}{5}} e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{13\pi}{15}}$
Aclaración. Recordemos que multiplicar $z = \rho e^{i\theta}$ por $Z^* = e^{i\alpha}$ significa: $zz^* = \rho e^{i(\theta+\alpha)}$ lo cual equivale a rotar el z dado, en sentido "(+)" un ángulo α. Así para calcular z_2 basta multiplicar el z_0 dado por la raiz $\hat{z_2}$ de la unidad.

Problema 23

La imagen de P de la franja vertical $\mathcal{F} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq Re\ (z) \leq 3\}$ por la función exponencial $z \longrightarrow e^z$ satisface una de las condiciones a continuación, señale la verdadera y explique:
(a) Está contenida en el anillo $\{z \mid 3 \leq |z| \leq 50\}$
(b) Está contenida en el anillo $\{z \mid |z| \geq 4\}$
(c) Está contenida en el anillo $\{z \mid |z| \leq 20\}$
(d) Está contenida en el anillo $\{z \mid 2 \leq |z| \leq 30\}$
(e) Ninguna de las anteriores

Solución
(d) Está contenida en el anillo $\{z \mid 2 \leq |z| \leq 30\}$ puesto que $e^1 \approx 2.718281828$ y $e^3 \approx 20.08553691$. Por tanto $2 \leq |z| \leq 30$. Obsérvese que en este ejercicio, lo importante es la relación cumplida por la parte real.

Problema 24
Determinar k para que sea cierta la ecuación
$\log_{\frac{7}{4}\pi}(1+i)^2 = 2\log_{\frac{7}{4}\pi}(1+i) + 2k\pi i$

Solución
Primer Miembro: $\log_{\frac{7}{4}\pi}(1+2i-1) = \log_{\frac{7}{4}\pi}(2i) = \ln 2 + i(\frac{\pi}{2} + 2p\pi)$ con p tal que $\frac{\pi}{2} + 2p\pi \in [\frac{7}{4}\pi, \frac{15}{4}\pi) \Rightarrow p = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \ln 2 + \frac{5\pi}{2} i$
Segundo Miembro: $2\log_{\frac{7}{4}\pi}(1+i) + 2k\pi i = 2[\ln\sqrt{2} + \frac{9}{4}\pi i] + 2k\pi i = \ln 2 + \frac{18\pi}{4} i + 2k\pi i = \ln 2 + \frac{9\pi}{2} i + 2k\pi i$

Por tanto, $\ln 2 + \dfrac{5\pi}{2} i = \ln 2 + \dfrac{9\pi}{2} i + 2k\pi i \Leftrightarrow 2k\pi i = \dfrac{5\pi}{2} i - \dfrac{9\pi}{2} i = -2\pi i \Leftrightarrow k = -1.$

Problema 25
Determinar k para que sea cierta la ecuación:
$\log_{\frac{3}{4}\pi}(1+i)^3 = 3\log_{\frac{3}{4}\pi}(1+i) + 2k\pi i$

Solución
Solución: $k = -3$.

Problema 26
Hallar a y b sabiendo que $z = a + bi$ satisface:
$Log(\dfrac{\pi}{2} + Logz) = \ln\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} + i\dfrac{\pi}{4}$

Solución
$e^{\ln(\frac{\pi}{\sqrt{2}} + i\frac{\pi}{4})} = \dfrac{\pi}{2} + Logz$

$Logz = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \dfrac{\pi}{2} = i\dfrac{\pi}{2}$

$Log(a+bi) = \ln\sqrt{a^2+b^2} + i\theta = i\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow Logz = \dfrac{i\pi}{2} \Leftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{2}} = 0 + i = i$. Por tanto $a = 0;\ \ b = 1$

Problema 27

De las definiciones de $\cosh z$ y $\operatorname{senh} z$ demuestre que
(a) $\cosh z = \cos(iz)$
(b) $\operatorname{senh} z = -\operatorname{sen}(iz)$
(c) $\tanh z = -i \tanh(iz)$
(d) $\coth z = i \cot(iz)$
(e) $\operatorname{sech} z = \sec(iz)$
(f) $\operatorname{csch} z = i \csc(iz)$
(g) $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z$
(h) $\cosh(-z) = \cosh z$
(i) $\cosh 0 = 1$
(j) $\operatorname{senh} 0 = 0$
(k) $\operatorname{senh} 2z = 2(\operatorname{senh} z)\cosh z$
(l) $\cosh 2z = \cosh^2 z + \operatorname{senh}^2 z = 2(\cosh^2 z) - 1 = 2(\operatorname{senh}^2 z) + 1$

Solución
Este problema queda planteado como ejercicio para el estudiante.

Capítulo 11

Derivación - Funciones Analíticas - Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Objetivos: En este capítulo el alumno aprenderá los conceptos de derivabilidad, Analiticidad de una función $f : A(\textit{abierto}) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, para ello tendrá que digerir varios teoremas importantes y saber aplicarlos.

Definición 1 (Función derivable) *Sea $f : A(\text{abierto}) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y sea $z_0 \in A$. Se dice que f es derivable en z_0, si existe* $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \overset{\substack{\textit{Notación}\\ \downarrow}}{=} [f'(z)]_{z=z_0} \overset{\substack{\textit{Notación}\\ \downarrow}}{=} \dfrac{df(z)}{dz}|_{z=z_0}$

Por comodidad, se escribe $f'(z_0) = \dfrac{df(z_0)}{dz}$.
Ahora, $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim\limits_{h\to O} \dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ si $h = z - z_0$ y $O = 0 + 0i$.
El número complejo $f'(z_0)$ definido por el límite anterior se llama *la derivada de f en z_0*.
Si f es derivable $\forall z \in A$, se dice que f es derivable en A.

Definición 2 (Función Analítica) *$f : A(\text{abierto}) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice Analítica (u holomorfa) en un punto $z_0 \in A$ si f es derivable en un entorno de z_0, es decir, si f es derivable en cada punto de un disco abierto $D(z_0; r) \subset A$ (o en cada punto de un abierto de A que contenga a z_0). Si f es analítica en cada punto de A entonces se dice que f es analítica en A.*

Definición 3 (Función Entera) *Si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica en cada punto de $\mathbb{C}$, se dice que f es una función entera.*

Una propiedad muy importante, que repasaremos más adelante y que contrasta con el caso real, es que para $f : A(\text{abierto}) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, si existe f' entonces también existen $f'', f''', \dots, f^{(n)}, \dots$ (lo cual no siempre sucede para funciones reales).

Teorema 1 (Propiedades de funciones analíticas) *Si f y g son analíticas en un abierto $A \subset \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{C}$, entonces se cumple:*

(a) La derivada de una constante compleja es cero

(b) af y bg son analíticas en A

(c) $af + bg$ es analítica en A

(d) $f * g$ es analítica en A y $(f * g)' = f' * g + f * g'$

(e) Si $g(z) \neq O \ \ \forall z \in A$, entonces f/g es analítica en A y $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' * g - f * g'}{g^2}$

Ahora son ejercicios inmediatos, basándose en el teorema 12, que:

(i) Cualquier polinomio $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ es analítica en $\mathbb{C}$ (en otras palabras, las funciones polinómicas son enteras) y $p'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots + n a_n z^{n-1}$.

(ii) Cualquier función racional $R(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ es analítica en $\mathbb{C}$ excepto en los puntos donde $q(z) = O$.

Teorema 2 (Regla de la Cadena) *Sean $f : A(\text{abierto}) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $g : B(abierto) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ con las condiciones siguientes: Imagen de $f \subset B$, f analítica en A, g analítica en Imagen de f. Entonces se cumple que la compuesta $g\ o\ f$ es analítica en A con $(g\ o\ f)(z) = g(f(z))$ y $(g\ o\ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$.*

A pesar del paralelismo con funciones reales, resulta un poco más serio demostrar que una función es derivable en el caso complejo que en el caso real. Por ejemplo

$$
\begin{aligned}
f :\ \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\
z = x + iy &\longrightarrow f(z) = \overline{z} = x - iy
\end{aligned}
$$

no es derivable en todo $\mathbb{C}$ (aunque pareciera serlo).

Ahora bien, necesitamos una herramienta más fuerte que la definición para demostrar que ciertas funciones son derivables. Esta herramienta la constituyen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y los criterios de diferenciabilidad de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Recordemos que una función compleja

$$
\begin{aligned}
f : A(\text{abierto}) \subset \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\
z = x + iy &\longrightarrow f(z) = u(x, y) + iv(x, y)
\end{aligned}
$$

puede ser considerada como una función vectorial de dos variables

$$
\begin{aligned}
f : A \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
(x, y) &\longrightarrow f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))
\end{aligned}
$$

Recordemos también de MA 2112, que $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es diferenciable en $(x_0, y_0) \in A$ si existen y son continuas las derivadas parciales $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ en una vecindad de (x_0, y_0)

Teorema 3 *Sea $f : A(\text{abierto}) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$. Si existe $f'(z)|_{z=z_0}$ entonces con $f = u + iv$, existen $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y),\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y),\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x, y),\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x, y)$ en (x_0, y_0) y se cumple que*

$$
\begin{aligned}
f'(z)|_{z=z_0} &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\
&= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)
\end{aligned}
$$

Teorema 4 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann) *Sea $f : A(\text{abierto}) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$. Suponga que f es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$. Entonces existen $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ en (x_0, y_0) y se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)
\end{aligned}
$$

Observación 1 *El teorema 15 va en una sola dirección: Si existe $f'(z_0)$, existen $u_x,\ u_y,\ v_x,\ v_y$ y se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (C-R) en (x_0, y_0). El recíproco es falso, si existen $u_x,\ u_y,\ v_x,\ v_y$ y se satisfacen las ecuaciones de (C-R) en (x_o,y_o), f no tiene porque ser derivable en z_o.*

El próximo teorema nos da las condiciones necesarias y suficientes para que f sea derivable.

Teorema 5 *Sea $f : A(abierto) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$, $z_0 = x_0 + iy_0$. f es derivable en $z_0 \Longleftrightarrow f$, considerada como función de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, es diferenciable en (x_0, y_0) y se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (x_0, y_0).*

Ahora bien, si u y v son funciones $\mathcal{C}^1$ (tienen primeras derivadas parciales continuas), podemos concluir el

Corolario 1 *$f = u + iv$ es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \iff u, v \in \mathcal{C}^1(x_0, y_0)$ y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (x_0, y_0).*

Finalmente, recordando la definición 2 (de función analítica), podemos extender el corolario 4 a funciones analíticas:

Corolario 2 *$f : A(\text{abierto}) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$es analítica en $z_0 \in A$ (es decir, derivable en un entorno de z_0) $\iff$ las componentes de f, u y $v \in \mathcal{C}^1$(un entorno de (x_0, y_0)) y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en dicho entorno.*

11.1 Condiciones de Cauchy-Riemann en forma polar

En algunas situaciones, es conveniente utilizar las ecuaciones de (C-R) en forma polar (o trigonométrica). Para ello, recordamos que la transformación

$$\begin{array}{rcl} T : Plano\ \rho\theta & \longrightarrow & Plano\ XY \\ (\rho, \theta) & \longrightarrow & T(\rho, \theta) = (x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) \end{array}$$

no es biyectiva (por no ser inyectiva). Por ejemplo, $\begin{array}{rcccl} T(4,0) & = & (4\cos 0, 4\operatorname{sen} 0) & = & (4,0) \\ T(4,2\pi) & = & (4\cos 2\pi, 4\operatorname{sen} 2\pi) & = & (4,0) \end{array}$ (y así, a dos puntos distintos, $(4,0)$ y $(4,2\pi)$, les corresponde una misma imagen, $(4,0)$).

Por lo tanto, restringimos el dominio de T a un abierto donde la función sea biyectiva y diferenciable.

Un dominio adecuado es $\{(\rho, \theta) \mid \rho > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\} = D = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$.

Ahora presentamos el teorema correspondiente:

Teorema 6 *Sea $f : A(\text{abierto}) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$, $z_0 = x_0 + y_0$. f es analítica en $z_0 \in A$ (es decir, derivable en un entorno de de z_0) $\iff$ las componentes de f, u y $v \in \mathcal{C}^1$(un entorno de (x_0, y_0)) y satisfacen las siguientes ecuaciones (conocidas como ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar) en dicho entorno:*

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} & = & \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \rho} & = & -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \end{array}$$

Además, en el teorema 3 se puede sustituir el resultado por:

$$f'(z)|_{z=z_0} = \left[\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + i\left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\right]_{(\rho_0, \theta_0)}$$

con $\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = \dfrac{x}{\rho} = \cos\theta,\ \theta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2 + y^2} = -\dfrac{1}{\rho}\operatorname{sen}\theta$

o bien $f'(z)|_{z=z_0} = \left[\dfrac{\partial v}{\partial \rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial y} - i\left(\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial y}\right)\right]_{(\rho_0, \theta_0)}$

Teorema 7 *Sea*

$$\begin{array}{rcl} f : A(\text{abierto}) \subset \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \end{array}$$

con f analítica en A. Entonces, las partes real e imaginaria de f son funciones armónicas en A (es decir, $\nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ \nabla^2 v = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,\ \forall\, (x, y) \in A$, considerando A como subconjunto de $\mathbb{R}^2$)

Teorema 8 *Sea $u :\ A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica. Entonces, para cada $z = x + iy$ en A (considerando ahora $A(\text{abierto}) \subset \mathbb{C}$) existe una función analítica $f :\ A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definida en una vecindad de z, tal que $u = \operatorname{Re} f$*

El teorema podría aplicarse también, cambiando u por v, con $v = \operatorname{Im} f$)

Corolario 3 *Las funciones armónicas pueden ser consideradas como la parte real o parte imaginaria de alguna función analítica (al menos localmente)*

11.2 Ejercicios Resueltos

Problema 1
Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $z \longrightarrow f(z) = z^3$. Demuestre formalmente que f es una función entera y que $f'(z) = 3z^2$ utilizando la teoría estudiada.

Solución
Vamos a utilizar el corolario 5 del teorema 17 y la definición 3:
En primer lugar, f entera significa que f es función de $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ (lo es por definición) y además es analítica. Esto lo vamos a demostrar. Para ello, necesitamos que u y v (las componentes de f) sean $\mathcal{C}^1$ en todo $\mathbb{C}$ (el dominio de la función) y satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo $\mathbb{C}$.
En efecto: $f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2iy + 3x(i^2)(y^2) + i^3y^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) = u(x,y) + iv(x,y)$.
Ahora bien, u y v son funciones polinómicas en $\mathbb{R}^2$ y por tanto (de MA-2112) sabemos que existen $u_x,\ u_y,\ v_x,\ v_y$ y que estas son, a su vez, funciones polinómicas en $\mathbb{R}^2$ y por tanto continuas en $\mathbb{R}^2$. Asi que $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Falta probar que u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3(x^2 - y^2),\ \frac{\partial v}{\partial y} = 3(x^2 - y^2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy,\ -\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

Finalmente, aplicando la definición 3 y el teorema 17 concluimos que f es función entera. Además, por el teorema 3
$f'(z)|_{z=z_0} = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
Luego, $f'(z) = 3(x^2 - y^2) + i(6xy)$ y $3z^2 = 3(x+iy)^2 = 3(x^2 - y^2 + 2ixy) = 3(x^2 - y^2) + i(6xy) = f'(z)$.

Problema 2
Dada la función $f : A(\text{abierto}) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ por $f(z) = \operatorname{Log}(\mathrm{z} + 5)$.
(a) Demuestre que f es analítica en un subconjunto B de A.
(b) Halle el conjunto B donde f es analítica.
(c) Demuestre que $f'(z) = \dfrac{1}{z+5}$, justificando su respuesta

Solución
Primero vamos a la parte (b).
(b) El posible conjunto de analiticidad de f es $B = \mathbb{C} \backslash \{z = w + iy \;/\; y = 0$ y $w = x + 5 \leq 0\}$
(Para ello es preciso recurrir al conjunto $A^*_{-\pi}$ definido al repasar la función logarítmica.)
(a) Ahora, f será analítica en B si satisface el corolario 5, teorema 17, es decir, si las partes real e imaginaria de f, u y v, tienen derivadas parciales continuas y además satisfacen las ecuaciones de (C-R) en $B^* = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, y)/x+5 = 0$ y $y = 0\}$.
Observemos que $f(z) = \mathrm{Log}\,(z + 5) = \mathrm{Log}\,(x + 5 + iy) = u + iv$ con $u = \ln \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = \dfrac{1}{2} \ln[(x+5)^2 + y^2]$ y $v = \mathrm{arctg} \dfrac{y}{x+5}$, siendo u y v consideradas como funciones de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, derivables $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $x+5 \neq 0,\ y \neq 0$ (Observar que estas condiciones se cumplen $\forall z \in B$). Además, $u_x,\ u_y,\ v_x,\ v_y$ son contínuas en B^*. Resta probar que u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann allí. En efecto:

$$\left.\begin{array}{rcccl} \dfrac{\partial u}{\partial x} & = & \frac{(x+5)}{\sqrt{(x+5)^2+y^2}} \frac{1}{\sqrt{(x+5)^2+y^2}} & = & \frac{x+5}{(x+5)^2+y^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} & = & \frac{\frac{1}{x+5}}{1+\frac{y^2}{(x+5)^2}} & = & \frac{x+5}{(x+5)^2+y^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ \ \forall (x,y) \in B^*$$

$$\left.\begin{array}{rcccl} \dfrac{\partial u}{\partial y} & = & \frac{y}{\sqrt{(x+5)^2+y^2}} \frac{1}{\sqrt{(x+5)^2+y^2}} & = & \frac{y}{(x+5)^2+y^2} \\ -\dfrac{\partial v}{\partial x} & = & -\frac{-\frac{y}{(x+5)^2}}{1+\frac{y^2}{(x+5)^2}} & = & \frac{y}{(x+5)^2+y^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \ \ \forall (x,y) \in B^*$$

Ahora, aplicando el Teorema 3, al existir $f'(z) \quad \forall z \in B$, $f'(z) = u_x + iv_x = \dfrac{x+5}{(x+5)^2+y^2} + i\dfrac{-y}{(x+5)^2+y^2} = \dfrac{(x+5) - iy}{(x+5)^2+y^2}$. Por otra parte, $\dfrac{1}{z+5} = \dfrac{1}{x+5+iy} = \dfrac{x+5-iy}{(x+5)^2+y^2}$.
Así, hemos demostrado que $\exists\ f'(z)$ en B y $f'(z) = \dfrac{1}{(z+5)}$.

Nota Didáctica: El alumno debe entender que en un examen, no basta con nombrar un teorema por un número, sino que es necesario que enuncie las condiciones del mismo (como lo hemos hecho hasta ahora). Sin embargo, de aquí en adelante, para no hacer las exposiciones de las soluciones demasiado largas, mencionaremos sólo el teorema por su número, quedando al alumno agregar las condiciones correspondientes. **Problema 3**
Hallar el dominio de analiticidad de f dada por $f(z) = \log_{\frac{\pi}{2}}(z + 3i)$ y dibujarlo.

Solución
$z + 3i = x + iy + 3i = x + i(y + 3)$. Por lo tanto, Dom. Analiticidad $f = \mathbb{C} \backslash \{$rayo $y_0 = \frac{\pi}{2}\} = \mathbb{C} \backslash \{w_1 + iw_2 \;/\; w_1 = x = 0,\ w_2 = y + 3 \geq 0\} = \mathbb{C} \backslash \{x + iy \;/\; x = 0,\ y \geq -3\}$.
En este caso, el dominio queda como en la Figura 11.1

Problema 4
Demuestre que es derivable en $z = 0 + 0i = O$, la función f, donde $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$

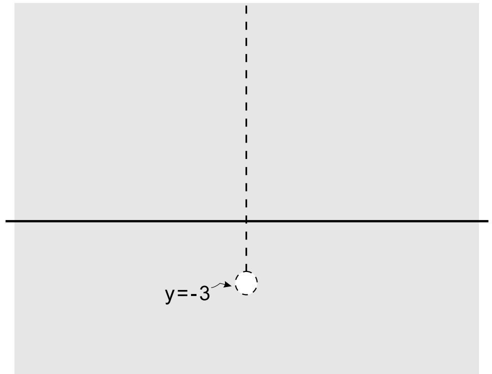


Figura 11.1: Problema 3

Solución
En este ejercicio, no necesitamos herramientas fuertes como las del teorema 17. La sencillez de la función, nos hace pensar en la definición de derivada:

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{x^2+y^2-0}{x+iy-O} = \frac{x^2+y^2}{x+iy} = \frac{(x^2+y^2)(x-iy)}{x^2+y^2} = x-iy$$

Luego, $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim\limits_{x+iy\to 0+0i}\dfrac{f(z)-f(O)}{x+iy}$ existe y $\lim\limits_{x+iy\to 0+0i}(x-iy) = 0-0i = O$ (por ser φ, $\varphi(z) = \overline{z} = x-iy$ continua debido a que $u = x$, $v = -y$ son funciones polinómicas en $\mathbb{R}^2$).

Problema 5
Sea $f(z) = |z|^2$. Demuestre que f no es derivable para $z \neq O$.

Solución
La demostración se hará usando (teorema de lógica que ha debido estudiar en algún curso) el hecho de que si un teorema es cierto entonces también lo es su contra-recíproco (o negación del recíproco). Pensemos en el teorema 15: $f = u + iv$ derivable en $z_0 = (x_0, y_0) \in A$(abierto)$\subset \mathbb{C} \Longrightarrow$ existen $u_x,\ u_y,\ v_x,\ v_y$ en $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ y se satisfacen las ecuaciones de Cauchy- Riemann en (x_0,y_0). El contra-recíproco sería: Si no se satisfacen las condiciones de (C-R) en $(x_0,y_0) \Longrightarrow f$ no es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$.
En nuestro caso, sea $z = x+iy \neq 0+0i,\ |z|^2 = x^2+y^2,\ f(z) = |z|^2 = x^2+y^2+0i \Longrightarrow \begin{cases} u(x,y) &= x^2+y^2 \\ v(x,y) &= 0 \end{cases}$
Por ser u función polinómica en $\mathbb{R}^2$ y v la función nula en $\mathbb{R}^2$, es obvio que existen las derivadas parciales de u y v:
$\begin{matrix} u_x = 2x & , & v_y = 0 \\ v_x = 0 & , & u_y = 2y \end{matrix}$, recordemos que (C-R) serían: $\begin{cases} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{cases}$
pero en nuestro caso, la única manera de cumplirse (C-R) sería con $x = 0 = y$, cosa imposible ya que por hipótesis, $x+iy \neq 0+0i$.
Conclusión: f no es derivable para $z \neq O$.

Problema 6
Sea $f(z) = e^z$. Demuestre que f es función entera.

Solución

$f:\mathbb{C}\Longrightarrow\mathbb{C}\backslash\{O\},\ e^z=e^{x+iy}=e^x\cos y+ie^x\,\mathrm{sen}\,y$.

Es obvio que, en $\mathbb{R}^2$, $u(x,y)=e^x\cos y,\ v(x,y)=e^x\,\mathrm{sen}\,y$ tienen derivadas parciales y estas, a su vez, son continuas en $\mathbb{R}^2$. Se deja al alumno demostrar que u y v también satisfacen las ecuaciones de (C-R) en $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto (¡Explique el teorema correspondiente!) f es analítica en todo $\mathbb{C}$. (f es entera si su dominio es $\mathbb{C}$ y si es analítica allí).

Problema 7

De manera análoga a la demostración hecha en el ejercicio anterior, puede ud. demostrar que son funciones enteras:

(a) $f_1(z)=\cos z$

(b) $f_2(z)=\,\mathrm{sen}\,z$

Ayuda: $$\begin{array}{rcl}\cos(x+iy)&=&(\cos x)\cosh y-i(\,\mathrm{sen}\,x)\,\mathrm{senh}\,y\\ \mathrm{sen}\,(x+iy)&=&(\,\mathrm{sen}\,x)\cosh y+i(\cos x)\,\mathrm{senh}\,y\end{array}$$

Solución

¡Hágalo usted mismo!.

Problema 8

Sea $f(z)=\dfrac{1}{z},\ z\neq O$. Halle la parte real e imaginaria de f y demuestre que existe $f'(z)$ y es -$\dfrac{1}{z^2}$

Solución

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rcccl}\text{Real}\,f(z)&=&u(x,y)&=&\dfrac{x}{x^2+y^2}\\ \text{Im}\,f(z)&=&v(x,y)&=&\dfrac{-y}{x^2+y^2}\end{array}\right.$$

u y v son funciones racionales en $\mathbb{R}^2$ y como $z\neq 0\Longrightarrow x^2+y^2\neq 0$ entonces u y v tienen derivadas parciales, siendo estas, a su vez, funciones racionales y por tanto continuas $\forall\ (x,y)\neq(0,0)$. Resta probar que u y v satisfacen las ecuaciones de (C-R) para que por el teorema correspondiente (enunciado por el alumno) se cumpla la existencia de $f'(z)$.

En efecto, $$\begin{array}{rcccl}\dfrac{\partial u}{\partial x}&=&\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}&=&\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}&=&-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}&=&-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{array}\ \forall(x,y)\neq(0,0)$$

Luego, $\exists\ f'(z)\ \overset{\text{Teorema 3}}{=}\ u_x+iv_x=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+i\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

Compruebe Ud. que $-\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+i\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

Problema 9

Sea $f(z)=\,\mathrm{Log}\,[\dfrac{\mathrm{z}+2+2\mathrm{i}}{\mathrm{z}}]$

(a) Hallar Dominio de analiticidad de f.

(b) Dibuje tal dominio

Solución

(a) Dom. Analit. $f = \mathbb{C}\backslash\{w \;/\; \text{Im}\, w = 0,\; \text{Re}\, w \leq 0\}$

Ahora, $w = \dfrac{z+2+2i}{z} = \dfrac{x+iy+2+2i}{z} = \dfrac{(x+2)+i(y+2)}{x+iy} = \dfrac{(x-iy)[x+2+i(y+2)]}{x^2+y^2} =$

$\frac{x^2+2x+y^2+2y+2(x-y)i}{x^2+y^2} = \frac{(x+1)^2+(y+1)^2-2}{x^2+y^2} + i\,\frac{2(x-y)}{x^2+y^2}$

$\text{Re}\, w \leq 0 \Longleftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 2;\;\; \text{Im}\, w = 0 \Longleftrightarrow x = y$

Luego, $2(x+1)^2 \leq 2 \Longleftrightarrow |x+1| \leq 1 \Longleftrightarrow -1 \leq x+1 \leq 1 \Longleftrightarrow -2 \leq x \leq 0$

Así, $\mathrm{Log\, w}$ es analítica en $\mathbb{C}\backslash\{z = x+iy \;/\; x = y \;\text{ y }\; x \in [-2,0]\}$.

(b)Ver figura.

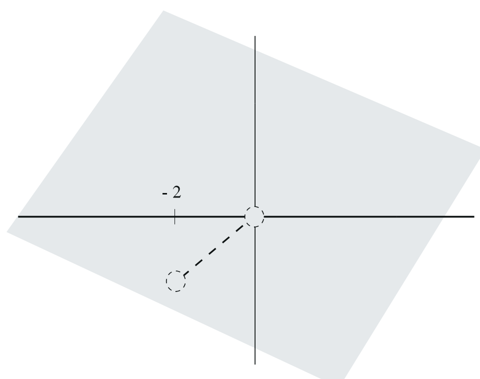


Figura 11.2: Dominio de analiticidad Parte b. Problema 9

Problema 10

Sea $f(z) = \mathrm{Log\, z}$. Demuestre que f es analítica en su dominio y que $f'(z) = \dfrac{1}{z}$. Utilice expresamente las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar

Solución
Dom. de Analit. de $f(z) = \mathbb{C} \backslash \{x + iy \ / \ y = 0, \ x \leq 0\} = D$
$\mathrm{Log\,z} = \ln|\mathrm{z}| + \mathrm{i}\arg\mathrm{z}, \ -\pi < \arg\mathrm{z} < \pi.$
En forma polar, $\mathrm{Log\,z} = \ln\rho + \mathrm{i}\theta, \ \rho > 0, \ \theta \in (-\pi, \pi), \ \mathrm{u}(\rho,\theta) = \ln\rho, \ \mathrm{v}(\rho,\theta) = \theta$. Es obvio entonces que u y v tienen derivadas parciales respecto de ρ y de θ en su dominio y que $u_\rho = \dfrac{1}{\rho}, \ u_\theta = 0, \ v_\rho = 0, \ v_\theta = 1$ y estas funciones a su vez son continuas (obvio) en $\mathbb{R}^2$ con $\rho > 0$ y $\theta \in (-\pi, \pi)$.
Resta probar las ecuaciones de (C-R) en forma polar:

$$u_\rho = \frac{1}{\rho} v_\theta \quad \text{y} \quad u_\theta = -\rho v_\rho$$

En efecto: Como $u_\rho = \dfrac{1}{\rho}$ y $v_\theta = 1$ resulta $u_\rho = \frac{1}{\rho} v_\theta$, además como $u_\theta = 0$ y $v_\rho = 0$ concluimos que $u_\theta = -\rho v_\rho$
Finalmente, podemos afirmar que f es analítica en D.
Ahora, Teorema 3 (ponga el enunciado) $\Longrightarrow f'(z) = u_x + iv_x$, con $\begin{array}{ccccc} u & = & u(x,y) & = & u(\rho,\theta) \\ v & = & v(x,y) & = & v(\rho,\theta) \end{array}$
$u_x = \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + 0\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x}$
$v_x = \dfrac{\partial v}{\partial \rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = 0\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + 1\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{\partial \theta}{\partial x}$
Así,

$$u_x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

y

$$v_x = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}) = -\frac{\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

Por tanto, se tiene que $f'(z) = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{1}{z}$.

Problema 11
En el ejercicio 7, se demostró que $f_1(z) = \cos z$ y $f_2(z) = \operatorname{sen} z$ son funciones enteras. Demuestre ahora que $\dfrac{df_1}{dz} = -\operatorname{sen} z$ y $\dfrac{df_2}{dz} = \cos z$.

Solución
$f_1(z) = \cos z = \dfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}); \ f_2(z) = \operatorname{sen} z = \dfrac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$. En el ejercicio 6 se demostró que $f(z) = e^z$ es entera. Por lo tanto, también son enteras las funciones $g(z) = e^{iz}$ y $h(z) = e^{-iz}$ y, por propiedades de las funciones analíticas, también son enteras f_1 y f_2 (Mencione Ud. cuales son esas propiedades).
Además, $e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{ix-y} = e^{-y+ix} = e^{-y}\cos x + ie^{-y}\operatorname{sen} x$ y es muy fácil demostrar que $\dfrac{d}{dz}(e^{iz}) = ie^{iz}$ y que $\dfrac{d(e^{-iz})}{dz} = -ie^{-iz}$ (Utilice el teorema 3). Finalmente, mediante propiedades de las funciones analíticas, demuestre que $\dfrac{df_1}{dz} = -\operatorname{sen} z$ y $\dfrac{df_2}{dz} = \cos z$.

Problema 12
Sean $f(z) = (a - ib)z - i(b-2)\overline{z}^{\,2}$ con a y b constantes reales. Hallar las constantes a y b para que f sea analítica.

Solución
En el Capítulo 9, Problema 4 se hallan:
$u(x, y) = \text{Re } f(z) = ax + by - 2xy(b-2)$
$v(x, y) = \text{Im } f(z) = ay - bx - (b-2)(x^2+y^2)$. Ahora, por ser u y v funciones polinómicas en $\mathbb{R}^2$, existen u_x, u_y, v_x, v_y y estas, a su vez, son continuas en $\mathbb{R}^2$.

$$u_x = a - 2y(b-2) \quad ; \quad u_y = b - 2x(b-2)$$
$$v_x = -b - 2x(b-2) \quad ; \quad v_y = a - 2y(b-2)$$

Ecuaciones de (C-R): $\begin{array}{ccc} u_x & = & v_y \\ u_y & = & v_x \end{array} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} a - 2y(b-2) & = & a - 2y(b-2) \\ b - 2x(b-2) & = & b + 2x(b-2) \end{array} \right.$
La primera de las últimas ecuaciones es independiente de a y de b; de la segunda se tiene $-2b+4 = 2b-4 \Longleftrightarrow b = 2$. De modo que, cumpliéndose las condiciones del teorema 17, corolario 5, f es analítica en $\mathbb{C}$ si $b = 2$ y $a \in \mathbb{R}$ (cualquiera).

Problema 13
Sea

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & f(z) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\overline{z}^3}{|z|^2} & \text{si} \quad z \neq O \\ O & \text{si} \quad z = O \end{array} \right. \end{array}$$

(a) Averiguar si f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en O.
(b) Averiguar si f tiene derivada en O.

Solución
(a) $\overline{z}^3 = (x - iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) - i(3x^2y - y^3)$
Entonces $f(z) = u + iv$ con $u = \dfrac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2}$, $v = \dfrac{y^3 - 3x^2y}{x^2+y^2}$.

Por ser u y v funciones racionales si $(x, y) \neq (0, 0)$, existen $u_x(0, 0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(h, 0) - u(0, 0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{h^3 - 3h0^2}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 1 = 1$
$u_y(0, 0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(0, h) - u(0, 0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0}{h} = 0.$
$v_x(0, 0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{v(h, 0) - v(0, 0)}{h} = 0.$
$v_y(0, 0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{v(0, h) - v(0, 0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h} = 1.$
Por lo tanto, $u_x(O) = v_y(O) = 1,\ u_y(O) = -v_x(O) = 0 \Longrightarrow$ se cumplen las ecuaciones de (C-R) en $z = O$.
(b) Vamos directamente a la definición de derivada:
Si existiera, sería $f'(z)|_{z=O} = \lim\limits_{z \to O} \dfrac{\frac{\overline{z}^3}{|z|^2} - O}{z - O} = \lim\limits_{z \to O} \dfrac{\overline{z}\overline{z}\overline{z}}{z\overline{z}z} = \lim\limits_{z \to 0} \left(\dfrac{\overline{z}}{z} \right)^2$ el cual no existe, ya que si se toma $z = x + i0$ o $z = 0 + iy$ (nos acercamos al origen a través de uno u otro z) se encuentran límites distintos:

$$\lim_{x+i0 \to 0+0i} \left(\frac{x - iy}{x + iy} \right)^2 = \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right. \quad ; \quad \lim_{0+iy \to 0+0i} \left(\frac{x - iy}{x + iy} \right)^2 = \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right.$$

Hemos presentado un ejemplo de una función para la cual u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un punto y, sin embargo, la función no es derivable en dicho punto. Con esto demostramos que el recíproco del teorema 15 **no** es cierto (En aquella oportunidad, afirmamos que el teorema va en una sola dirección $A \Longrightarrow B$).

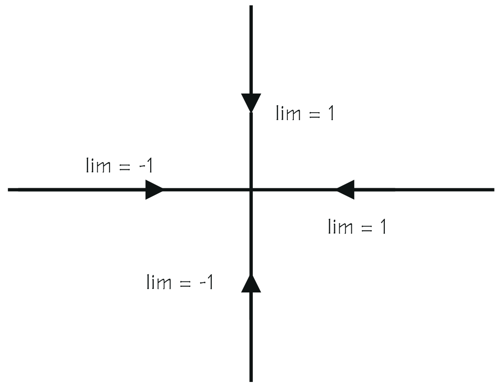


Figura 11.3: Parte b. Problema 13

Problema 14
Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Verificar si f satisface las ecuaciones de (C-R) en $z = O$, con

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{e^x(x\cos y + y \operatorname{sen} y) - x}{x^2+y^2} & \text{si} \quad x^2+y^2 > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

y

$$v(x,y) = \begin{cases} \frac{e^x(x\operatorname{sen} y - y \cos y) + y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad x^2+y^2 > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Solución
u_x, u_y, v_x, v_y existen por ser u y v combinaciones de funciones exponenciales, polinómicas y trigonométricas en $\mathbb{R}^2$.
Ahora, $u_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(h,0)-u(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{e^h-1}{h} - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1 - h}{h^2}$, el cual es de la forma $\dfrac{0}{0}$ y por la Regla de L'Hospital es igual a $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h-1}{2h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h}{2} = \dfrac{1}{2}$.
$u_y(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h \operatorname{sen} h - h^2}{h^3} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} h - h}{h^2} \overset{\text{L'H}}{\downarrow}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos h - 1}{2h} \overset{\text{L'H}}{\downarrow}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-\operatorname{sen} h}{2} = 0.$
Demuestre Ud. que $v_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0$ y que $v_y(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-\cos h}{h^2} = \dfrac{1}{2}$.
Así, $u_x(0,0) = v_y(0,0) = 1/2$ y $u_y(0,0) = -v_x(0,0) = 0$, es decir, sí se satisfacen las ecuaciones de (C-R) en $(0,0)$.

Problema 15
Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analítica en $A \subset \mathbb{C}$ y u y v funciones $\mathcal{C}^2(A)$. Demuestre que u y v son funciones armónicas en A como subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Solución
$u, v \in \mathcal{C}^2(A) \Longrightarrow$ existen hasta las derivadas parciales segundas de u y v respecto de x y de y y son continuas en A. Queremos probar que $\left.\begin{array}{rcccl} \nabla^2 u(x,y) & = & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & = & 0 \\ \nabla^2 v(x,y) & = & \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} & = & 0 \end{array}\right\} \forall (x,y) \in A.$

En efecto, al ser f analítica en A, se satisfacen las ecuaciones de (C-R) para u y v: $u_x = v_y,\ u_y = -v_x$. Por lo tanto $\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad , & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad , & \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \end{array}\right. .$

Luego, $\nabla^2 u(x,y) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0\ \forall (x,y) \in A$ por satisfacerse el teorema de Schwarz de las derivadas cruzadas (lo da la condición $u, v \in \mathcal{C}^2(A)$).

También, $\nabla^2 v(x,y) = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0\ \forall (x,y) \in A$ (por la misma razón anterior).

Problema 16
Demostrar que si $f(z) = z^4$ entonces Re $f(z)$ y Im $f(z)$ son funciones armónicas.

Solución
$f(z) = z^4$ es una función polinómica en $\mathbb{C}$. Si admitimos que las funciones polinómicas en $\mathbb{C}$ son analíticas, entonces, por el ejercicio 15, como Re $f(z)$, Im $f(z)$ también son polinómicas (y por tanto $\in \mathcal{C}^2(\mathbb{C})$ se cumple que Re $f(z)$ e Im $f(z)$ son funciones armónicas en $\mathbb{R}^2$ (Si no lo admitimos directamente, entonces se deja al alumno el hallar Re $f(z)$, Im $f(z)$ y demostrar que se cumplen las condiciones del teorema 17, corolario 5, etc.).

Problema 17
Hallar todos los puntos $z \in \mathbb{C}$ donde $f(z) = \operatorname{Log}(\operatorname{sen} \mathrm{z})$ es analítica. Dibuje tal conjunto.

Solución
Dom. Analit. $f(z) = D = \mathbb{C} \backslash \{w \ /\ \text{Im}\, w = 0, \text{Re}\, w \leq 0\}$.
Sea $w = \operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x+iy) = (\operatorname{sen} x)\cosh y + i(\cos x)\operatorname{senh} y$.
Ahora,

$$\text{Re}\, w = (\operatorname{sen} x)\cosh y \leq 0 \quad \text{si} \quad \operatorname{sen} x \leq 0 \text{ (puesto que } \cosh(0) = 1) \tag{11.1}$$

$$\text{Im}\, w = (\cos x)\operatorname{senh} y = 0 \iff \cos x = 0\ (x = \frac{\pi}{2} + k\pi) \text{ ó } y = 0 \tag{11.2}$$

Si $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ (\operatorname{sen} x)\cosh y = (-1)^k \cosh y < 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$ y de (11.1): $(2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi$.
Sea $A = \{z\ :\ \text{Im}\, z = 0,\ (2k-1)\pi \leq \text{Re}\, z \leq 2k\pi\} \cup \{z\ :\ \text{Re}\, z = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\} \cup \{z\ :\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi\}$
Así, $\operatorname{Log} \circ \operatorname{sen}$ es analítica $\forall z \in \mathbb{C} \backslash A$ Todo lo que este indicado como - - - o | se saca de $\mathbb{C}$. (Ver figura 11.4)

Problema 18
(a) Hallar dominio de analiticidad de $f(z) = \operatorname{Log} \dfrac{\mathrm{z} - 3 - 3\mathrm{i}}{\mathrm{z}}$.
(b) Dibujar tal dominio.

Solución
(a) Análogamente a lo hecho en el ejercicio 9, demuestre que Dom. Analit. $f(z) = \mathbb{C} \backslash \{x + iy \mid x \in [0,3],\ y = x\}$.

•

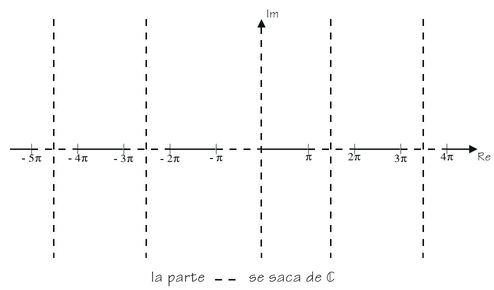


Figura 11.4: Dominio de Analiticidad. Problema 13

(b)

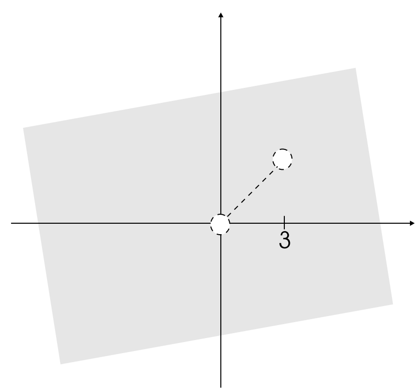


Figura 11.5: Dominio de Analiticidad. Problema 18

Problema 19
¿Es analítica $f(x+iy) = x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i(y - \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$ an algún subconjunto de $\mathbb{C}$?.

Solución
Demuestre que existen $u_x,\ u_y,\ v_x,\ v_y$ en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ y que $u_x = \frac{(\sqrt{x^2+y^2})^3+y^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3},\ v_y = \frac{(\sqrt{x^2+y^2})^3-x^2-2y^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$ Ahora, $u_x \neq v_y \implies$ no se cumple una de las ecuaciones de (C-R) $\implies f$ no es analítica en ningún subconjunto de $\mathbb{C}$ (Contra-recíproco del teorema 15)

Problema 20
Demuestre que si $f(x+iy) = u(x,y) + iu^3(x,y)$ es función entera, entonces f es constante

Solución
f entera $\Longrightarrow f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ analítica$\Longrightarrow u$ y v cumplen las ecuaciones de (C-R) en $\mathbb{R}^2$ (Mencionar teorema correspondiente).
Luego,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \iff \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial (u^3)}{\partial y}=3u^2\frac{\partial u}{\partial y} \tag{11.3}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \iff \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial (u^3)}{\partial x}=-3u^2\frac{\partial u}{\partial x} \tag{11.4}$$

De (11.3), $\frac{\partial u}{\partial x}=3u^2\frac{\partial u}{\partial y} \overset{(11.4)}{\overset{\downarrow}{=}} 3u^2(-3u^2\frac{\partial u}{\partial x})$, es decir, $\frac{\partial u}{\partial x}=-9u^4\frac{\partial u}{\partial x}\iff -9u^4=1$ ó $\frac{\partial u}{\partial x}=0$, pero la posibilidad $-9u^4=1$ es absurda al ser $u(x,y)\in\mathbb{R}$.
Por tanto, $\frac{\partial u}{\partial x}=0\Longrightarrow u$ no depende de x sino de y.
Análogamente, despejando $\frac{\partial u}{\partial y}$ de (11.4):
$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-3u^2\frac{\partial u}{\partial x} \overset{(11.3)}{\overset{\downarrow}{=}} -3u^2(3u^2\frac{\partial u}{\partial y})\Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=-9u^2\frac{\partial u}{\partial y}$ y por el mismo razonamiento anterior, $\frac{\partial u}{\partial y}=0\Longrightarrow u$ no depende de y sino de x.
Por lo tanto, u es constante y también lo es $f=u+iu^3$.

Problema 21
(a) Hallar el dominio de la función dada por $f(z)=\operatorname{cotgh}(z^3)$.
(b) Explique donde es analítica.

Solución
(a) Dom $f=\{z\,/\,\operatorname{senh}(z^3)\neq 0\}$ puesto que $f(z)=\operatorname{cotgh}(z^3)=\dfrac{\cosh(z^3)}{\operatorname{senh}(z^3)}$
(b) Por ser f un cociente de funciones analíticas: $\begin{array}{rcl}\cosh(z^3)&=&\frac{1}{2}(e^{z^3}+e^{-z^3})\\ \operatorname{senh}(z^3)&=&\frac{1}{2}(e^{z^3}-e^{-z^3})\end{array}$, f es analítica excepto donde se anule el denominador.
En efecto, $\cosh(z^3)$ y $\operatorname{senh}(z^3)$ son analíticas por serlo $h(z)=e^z$ y $g(z)=e^{-z}$. Luego, el dominio de analiticidad de f es el mismo Dom f.
Ahora, necesitamos identificar los z tales que $\operatorname{senh}(z^3)=O$. Para ello, observemos que $\operatorname{senh}(z^3)=O\iff \dfrac{e^{z^3}-e^{-z^3}}{2}=0\iff e^{2z^3}=1\iff 2z^3=\log 1=0+i(0+2k\pi)=2ik\pi\iff z^3=ik\pi\iff z=\sqrt[3]{ik\pi}=\sqrt[3]{k\pi}\text{cis}\dfrac{\pi+2k\pi}{3},\ k=0,1,2.$
Así, Dom. Analit. $f=\mathbb{C}\backslash\{z\,/\,z=\sqrt[3]{k\pi}\text{cis}\dfrac{\pi+2k\pi}{3},\ k=0,1,2\}$.

Problema 22
Sea $f(z)=(\cos x)(\cosh y+a\operatorname{senh} y)+i(\operatorname{sen} x)(\cosh y+b\operatorname{senh} y)$.
(a) Hallar las constantes a y b para que f sea analítica.
(b) Demuestre que $f'(z)=ie^{iz}$, utilizando los valores de a y de b.

Solución
(a) $u(x,y)=(\cos x)(\cosh y+a\operatorname{senh} y);\ v(x,y)=(\operatorname{sen} x)(\cosh y+b\operatorname{senh} y)$.
$\exists\, u_x,\, u_y,\, v_x,\, v_y$ por ser u y v combinaciones de funciones elementales en $\mathbb{R}^2$.

$u_x,\, u_y,\, v_x,\, v_y$ son continuas en $\mathbb{R}^2$ por la misma razón.

$$u_x = -(\operatorname{sen} x)(\cosh y + a \operatorname{senh} y),\ u_y = (\cos x)(\operatorname{senh} y + a\cosh y)$$

$$v_x = (\cos x)(\cosh y + b \operatorname{senh} y),\ v_y = (\operatorname{sen} x)(\operatorname{senh} y + b\cosh y)$$

Luego, $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ (ecuaciones de (C-R))

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} -\cosh y - a \operatorname{senh} y & = & \operatorname{senh} y + b\cosh y \\ \cosh y + b \operatorname{senh} y & = & -\operatorname{senh} y - a\cosh y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} b & = & -1 \\ a & = & -1 \end{array} \right.$$

Hemos verificado que se cumplen las condiciones del teorema 17- corolario 5.
(b) Al ser f analítica para $b=-1,\ a=-1$, será $f'(z) = u_x + i v_x$ (Teorema 3).
Luego, $f'(z) = -(\operatorname{sen} x)(\cosh y - \operatorname{senh} y) + i(\cos x)(\cosh y - \operatorname{senh} y)$.

Ahora, $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z = \cos(x+iy) + i \operatorname{sen}(x+iy) \overset{\text{¡Compruébelo!}}{\overset{\downarrow}{=}} (\cos x)\cosh y - (\cos x)\operatorname{senh} y + i[(\operatorname{sen} x)\cosh y - (\operatorname{sen} x)\operatorname{senh} y] = (\cos x)(\cosh y - \operatorname{senh} y) + i(\operatorname{sen} x)(\cosh y - \operatorname{senh} y)$.
Entonces, $ie^{iz} = -(\operatorname{sen} x)(\cosh y - \operatorname{senh} y) + i(\cos x)(\cosh y - \operatorname{senh} y) = f'(z)$.

Problema 23
Sea $f:\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, analítica en $D \subset \mathbb{C}$, $f = u + iv$. Si u y v son de clase $\mathcal{C}^2(D)$, demuestre que $\nabla^2(|f(z)|^2) = 4|f'(z)|^2$.

Solución
f analítica en $D \Longrightarrow \exists\, u_x,\, u_y,\, v_x,\, v_y$, continuas en D y se satisfacen las ecuaciones de (C-R) en D (Teorema 17).
Además, por teorema 3, $f'(z) = u_x + i v_x$.
Luego, $|f(z)|^2 = u^2 + v^2$ y $|f'(z)|^2 = u_x^2 + v_x^2$.

$$\frac{\partial}{\partial x}|f'(z)|^2 = 2u_x u + 2v_x v,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}|f'(z)|^2 = 2u_{xx}u + 2(u_x)^2 + 2v_{xx}v + 2(v_x)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}|f'(z)|^2 = 2u_y u + 2v_y v \overset{\text{(C-R)}}{\overset{\downarrow}{=}} -2v_x u + 2u_x v$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}|f'(z)|^2 = -2v_{yx}u - 2v_x u_y + 2u_{yx}v + 2u_x v_y = -2v_{yx}u + 2(v_x)^2 + 2u_{yx}v + 2(u_x)^2.$$

Ahora, $\left\{ \begin{array}{lcl} u_x & = & v_y \\ u_y & = & -v_x \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lclcl} u_{xx} & = & v_{xy} & = & v_{yx} \\ u_{xy} & = & u_{yx} & = & -v_{xx} \end{array} \right.$
Así, $\nabla^2(|f(z)|^2) = 4(u_x^2 + v_x^2) = 4|f'(z)|^2$.

Problema 24
Demuestre que la función $\operatorname{Arg} \mathrm{z}$ es armónica en $A = \mathbb{C}\backslash\{x+iy\ /\ x \le 0,\ y = 0\}$.

Solución
El alumno puede utilizar el teorema 7 (debe enunciarlo) para concluir que como $\operatorname{Arg}\mathrm{z} = \operatorname{Im}\operatorname{Log}\mathrm{z}$ y el conjunto A dado es el dominio de analiticidad de $\operatorname{Log}\mathrm{z}$ entonces $v = \operatorname{Arg}\mathrm{z}$ es función armónica en A (considerado ahora como subconjunto de $\mathbb{R}^2$).

Problema 25
Demuestre que $\begin{array}{rcl} u:\ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & u(x,y) = (\cos x)(\cosh y) \end{array}$ es una función armónica en $\mathbb{R}^2$.

Solución
Análogo al ejercicio 24, pensemos en la función $\cos z = \cos(x+iy) = (\cos x)\cosh y - i(\,\mathrm{sen}\, x)\,\mathrm{senh}\, y$. Observamos que $u(x,y) = \mathrm{Re}\,(\cos z)$. Aquí (en estas notas), podemos recordar que $\cos$ es función entera (analítica en todo $\mathbb{C}$), luego enunciar el teorema 7 y concluir que u es función armónica en $\mathbb{R}^2$. En un examen, habría que demostrar que $\cos$ es función analítica (utilizando, por ejemplo, el teorema 18 y llegar a la conclusión deseada mediante el teorema 7.

Problema 26
Sea $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\,\mathrm{sen}\, y)$. ¿Hay alguna función $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que la función f definida por $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea analítica en $\mathbb{C}$?. En caso afirmativo, hallarla.

Solución
Si $f = u + iv$ fuese analítica, entonces debería cumplir con las condiciones del teorema 17:

(i) $\exists\, u_x,\, u_y,\, v_x,\, v_y$ continuas en $\mathbb{R}^2$.

(ii) $u_x = v_y,\, u_y = -v_x$ (Cauchy-Riemann)

Veamos la condición (ii), suponiendo que se cumple (i).

$$u_x = v_y \Longleftrightarrow \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = e^x(x\cos y - y\,\mathrm{sen}\, y) + e^x\cos y \Longleftrightarrow v(x,y) = \int e^x(x\cos y - y\,\mathrm{sen}\, y$$
$$+\cos y)\,dy = \int e^x x\cos y\,dy - \int e^x y\,\mathrm{sen}\, y\,dy + \int e^x\cos y\,dy = xe^x\,\mathrm{sen}\, y - e^x(-y\cos y -$$
$$\int(-\cos y)\,dy) + e^x\,\mathrm{sen}\, y + C_1(x) = e^x(x\,\mathrm{sen}\, y + y\cos y - \,\mathrm{sen}\, y + \,\mathrm{sen}\, y) + C_1(x) \tag{11.5}$$

$$u_y = -v_x \Longleftrightarrow -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = e^x(-x\,\mathrm{sen}\, y - \,\mathrm{sen}\, y - y\cos y) \Longleftrightarrow v(x,y) = \int(e^x x\,\mathrm{sen}\, y + e^x$$
$$\mathrm{sen}\, y + e^x y\cos y)\,dx = x(\,\mathrm{sen}\, y)e^x - \int e^x\,\mathrm{sen}\, y\,dx + e^x\,\mathrm{sen}\, y + e^x y\cos y + C_2(y) = xe^x\,\mathrm{sen}\, y$$
$$-e^x\,\mathrm{sen}\, y + e^x\,\mathrm{sen}\, y + e^x y\cos y + C_2(y) = e^x(x\,\mathrm{sen}\, y + y\cos y) + C_2(y) \tag{11.6}$$

De 11.5 y 11.6 se deduce que $C_1(x) = C_2(y) = C =$ constante.
Luego,
$$v(x,y) = e^x(x\,\mathrm{sen}\, y + y\cos y) + C \tag{11.7}$$

Ahora veamos la parte (i). Es obvio que $\exists\, u_x,\, u_y$ continuas en $\mathbb{R}^2$ (¡Explique las razones!) y construida v a partir de (ii) según (11.7), las mismas razones esgrimidas para u valen para $v \Longrightarrow \exists\, v_x,\, v_y$ continuas en $\mathbb{R}^2$.
Conclusión: $f = u + iv$ es analítica en $\mathbb{C}$.

Problema 27
Sea $f(z) = \sqrt{1+e^{2z}}$, estando asociado el radical con Log (rama principal de $\log$).
(a) Hallar dominio de analiticidad de f.
(b) Hacer un dibujo de dicho dominio.

Solución
(a) $f(z) = \sqrt{1+e^{2z}} = h(g(z))$, con $g(z) = 1 + e^{2z}$ y $h(w) = \sqrt{w}$. Luego, el dominio de analiticidad de f es $\mathbb{C}\backslash\{z \,/\, \mathrm{Re}\,(1+e^{2z}) \leq 0,\ \mathrm{Im}\,(1+e^{2z}) = 0\}$.
Ahora bien, $z = x + iy,\ e^{2z} = e^{2x}\mathrm{cis}(2y) = e^{2x}\cos(2y) + ie^{2x}\,\mathrm{sen}\,(2y)$.
$\mathrm{Im}\,(1+e^{2z}) = 0 \Longleftrightarrow \,\mathrm{sen}\,(2y) = 0 \Longleftrightarrow 2y = n\pi \Longrightarrow \cos(2y) = \begin{cases} 1 & , \quad |n| \text{ par} \\ -1 & , \quad |n| \text{ impar} \end{cases}$

Además, Re $(1+e^{2z}) \leq 0 \Longleftrightarrow 1+e^{2x}\cos(2y) \leq 0 \Longleftrightarrow e^{2x}\cos(2y) \leq -1 \Longleftrightarrow \cos(2y) < 0 \Longrightarrow \begin{cases} 2y = n\pi,\ n \text{ impar} \\ e^{2x} \geq 1 \Longrightarrow x \geq 0 \end{cases}$

Luego, de $\mathbb{C}$ debemos sacar todos los $z = x+iy$ tales que $x \geq 0$ y $y = \dfrac{n\pi}{2}$, $n = \mp 1, \mp 3, \mp 5, \ldots$

(b) Ver figura en la página siguiente.

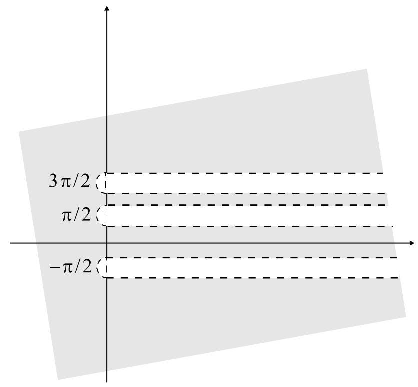


Figura 11.6: Dominio de Analiticidad. Problema 27

Capítulo 12

Integrales complejas de línea

Objetivos: El alumno debe aprender el concepto de Curva “suave a trozos” en $\mathbb{R}^2$, descrita por una función de $[a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$. También debe llegar al contenido teórico siguiente, $\int_C f(z)\, dz = \int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy$. Además debe entender las propiedades de la integral de un campo escalar, sobre una trayectoria, así como el Teorema Fundamental del Cálculo para $\int_C f$ y $f \in C(A)$ con A subconjunto simplemente conexo de $\mathbb{C}$.

12.1 Curvas en el plano complejo

Recordemos la definición de “curva descrita” por una función de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$:

Sea $\begin{array}{l} \sigma : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longrightarrow \sigma(t) = (x(t), y(t)) \end{array}$. Sea C curva en $\mathbb{R}^2$. Si cada $\sigma(t)\ \in C$, se dice que “σ describe a C”.

Definición 1 Curva C en $\mathbb{C}$, descrita por σ.
Sea $\begin{array}{l} \sigma : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longrightarrow \sigma(t) = x(t) + iy(t) \end{array}$, si cada $\sigma(t)\ \in C$, se dice que “σ describe a C”.

Ahora bien, si σ es contínua en $[a,b]$ se dice que C es curva contínua en $[a,b]$, notación: $\sigma \in \mathcal{C}[a,b] \Rightarrow C \in \mathcal{C}[a,b]$.

Definición 2 Curva Suave
Si existe $\sigma'(t) = x'(t) + iy'(t)$, $t \in [a,b]$ y $\sigma'(t) \in \mathcal{C}[a,b]$ y además $\sigma'(t) \neq 0 + 0i$, para todo $t \in (a,b)$ se dice que σ es “suave” sobre $[a,b]$ y por analogía se dice que también que C es “suave” sobre $[a,b]$.

Definición 3 Curva Suave a trozos
C descrita por σ es “suave a trozos”, si el intervalo $[a,b]$ puede subdividirse en un número finito de subintervalos $[a,a_1]; [a_1,a_2]; [a_2,a_3]; \ldots; [a_{n-1},b]$ con $a = a_0$ y $b = a_n$ tales que σ es suave en cada uno de los subintervalos. (se dice también que C es suave a trozos en $\mathbb{C}$). Todas las curvas bajo nuestra consideración serán suaves a trozos (a menos que se exprese lo contrario).

Definición 4
Sea $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ con $\sigma \in \mathcal{C}[a,b]$, entonces existe:

$$\int_a^b \sigma(t)\ dt = \int_a^b (x(t) + iy(t))\ dt = \int_a^b x(t)\ dt + i \int_a^b y(t)\ dt$$

Definición 5
Sea $f : A_{abierto} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{C}(A)$, sea además $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una función que describe a una curva C suave a trozos en A. Se define la integral de f a lo largo de la curva C (se dice también: a lo largo de σ):
notación: $\int_C f(z)\ dz$ o $\int_\sigma f(z)\ dz$ por

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\sigma(t))\sigma'(t)\ dt$$

Nota: Si no hay otros puntos excepcionales, es decir si C es suave en A se tiene

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = \int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)\ dt$$

Resultado Importante

Se demuestra que si $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = \int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)\ dt$, poniendo
$\sigma(t) = x(t) + iy(t)$, $\sigma'(t) = x'(t) + iy'(t)$, $\sigma'(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}$, $\sigma'(t)dt = d\sigma(t) = dx + idy$ y $f = u + iv$ se llega a

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\ dz = \int_{\mathcal{C}} udx - vdy + i\int_{\mathcal{C}} vdx + udy$$

Ambas integrales de línea analizadas en MA2112. Recuérdese que $u = u(x(t), y(t))$ y $v = v(x(t), y(t))$.

De la última fórmula (la cual sirve para ejercicios teóricos) y de las propiedades de las integrales de línea (estudiadas en MA2112), resultan las propiedades siguientes:

Sean f y $g : A_{abierto} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$; $f, g \in \mathcal{C}(A)$, sean $w_1 = a_1 + ib_1$, $w_2 = a_2 + ib_2$ complejos constantes dados. Entonces se cumple:

1. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} w_1 f\ dz = w_1 \int_{\mathcal{C}} f\ dz$, para cualquier w_1 constante en $\mathbb{C}$.
2. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (w_1 f + w_2 g)\ dz = w_1 \int_{\mathcal{C}} f\ dz + w_2 \int_{\mathcal{C}} g\ dz$ (linealidad respecto al integrando)
3. Sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ curvas en $\mathbb{C}$ representadas respectivamente por $\sigma_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\sigma_2 : [b, c] \longrightarrow \mathbb{C}$ con $C = \mathcal{C}_1 \uplus \mathcal{C}_2$ (unión disjunta) $= \mathcal{C}_1 \uplus \mathcal{C}_2$ la curva descrita por $\sigma_1 + \sigma_2$ con
$(\sigma_1 \circ \sigma_2)(t) = \sigma_1(t)$ si $t \in [a, b]$
$(\sigma_1 \circ \sigma_2)(t) = \sigma_2(t)$ si $t \in [b, c]$, entonces:

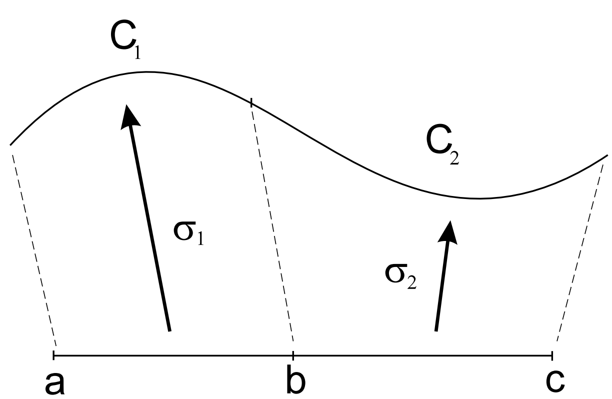


Figura 12.1:

$$\int_{\mathcal{C}_1 \uplus \mathcal{C}_2} f(z)\ dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z)\ dz + \int_{\mathcal{C}_2} f(z)\ dz$$

También se puede escribir $\displaystyle\int_{\sigma_1+\sigma_2} f(z)\ dz = \int_{\sigma_1} f(z)\ dz + \int_{\sigma_2} f(z)\ dz$

4. Si $\tilde{\sigma}$ es una reparamtrización de C, con C curva descrita por $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\sigma(t) = \tilde{\sigma}(\alpha(t))$, siendo $\alpha : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ con $\alpha'(t) > 0$, $t \in [a, b]$, entonces:
(i)$\int_\sigma f(z)\ dz = \int_{\tilde{\sigma}} f(z)\ dz$ si $\alpha'(t) > 0$, $t \in [a, b]$
(ii)$\int_\sigma f(z)\ dz = -\int_{\tilde{\sigma}} f(z)\ dz$ si $\alpha'(t) < 0$, $t \in [a, b]$
Podemos hablar entonces de la integral de f a lo largo, por ejemplo de una circunferencia sin especificar la parametrización. El esquema funcional es el siguiente (Ver página 151):

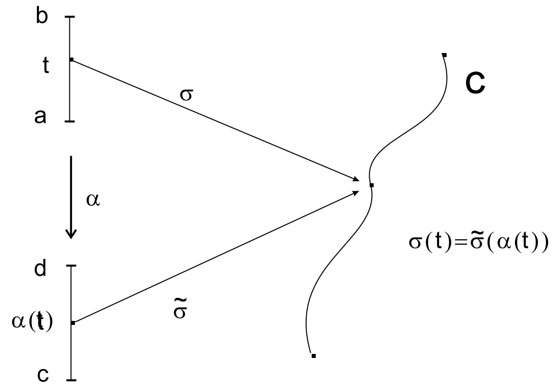


Figura 12.2:

5. Si designamos por $-\sigma$ o C^{-} a la curva C descrita por σ en sentido contrario a un sentido asignado, entonces: $\displaystyle\int_{-\sigma} f(z)\,dz = -\int_{\sigma} f(z)\,dz$ ó $\displaystyle\left(\int_{C^{-}} f(z)\,dz = -\int_{C} f(z)\,dz\right)$

Definición 6

$A \subset \mathbb{C}$ es conexo por arcos si elegido dos puntos z_1 y z_2 cualesquiera en A, siempre existe al menos una curva suave a trozos que une z_1 con z_2, que está contenida en A.

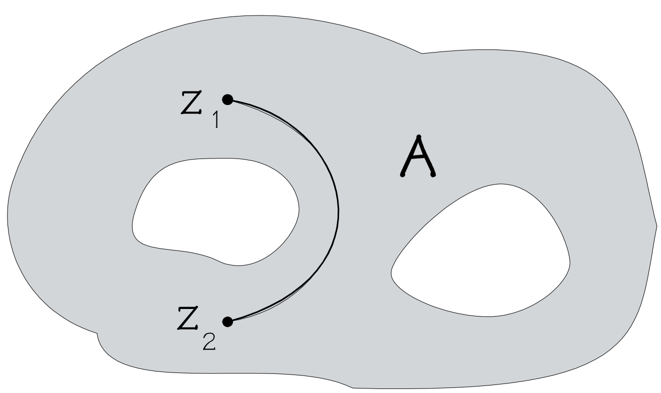


Figura 12.3:

Definición 7

$A \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexo, si es conexo por arcos y no tiene huecos.

Teorema Fundamental del Cálculo (o Teorema de una primitiva)

Sea $f : \underset{\substack{simplemente\\ conexo}}{A} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{C}(A)$ entonces existe una función $F : A \longrightarrow \mathbb{C}$, F analítica en A tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in A$. (Más adelante conoceremos que si F es analítica en $A \Rightarrow$ existen $F', F'', \ldots, F^{(n)}, \ldots$, todas contínuas en A, cosa que no ocurre para las funciones reales).

Conclusión del Teorema:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C F'(z)\,dz = F(\sigma(b)) - F(\sigma(a))$$

con C curva descrita por $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$. También se puede escribir como:

$$\int_C f(z)\,dz = F(B) - F(A)$$

Se dice que F es una primitiva de f si $F' = f$ y F' contínua.

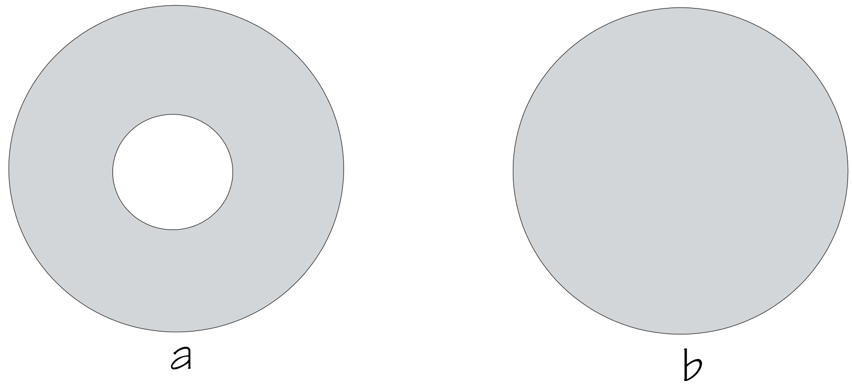


Figura 12.4: (a) Es conexo por arcos pero tiene un hueco, esto implica que no es simplemente conexo. (b) Es conexo por arcos y sin huecos lo cual implica que es simplemente conexo

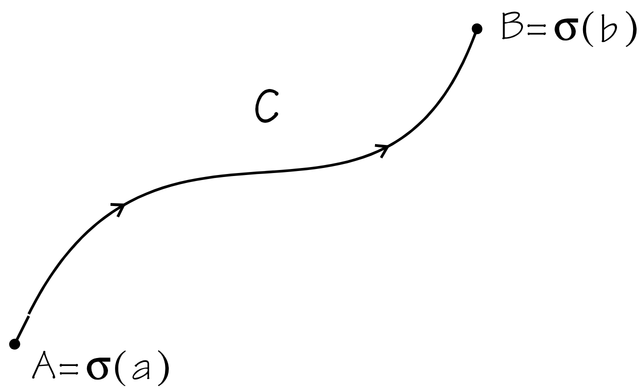


Figura 12.5:

Sin embargo, en algunos textos se define f como una función de un abierto $A \longrightarrow \mathbb{C}$, sin exigir que A sea simplemente conexo, en estos casos hay que pensar que C no debe estar en el interior de los huecos de A (si los hay).

12.2 Ejercicios Resueltos

Problema 1

Calcular $Re\{I\}$ y $Im\{I\}$ con $I = \displaystyle\int_{\sigma} z^3 \, dz$

(a) con $\tilde{\sigma}(t) = (1+i)t, \;\; t \in [1,4]$
(b) con $\sigma(t) = (1+i)t^2, \;\; t \in [1,2]$
(c) Establecer la relación entre (a) y (b).

Solución

(a) $\tilde{\sigma}(t) = (1+i)t = t + it, \;\; t \in [1,4]$
$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$
con $x = x(t), \;\; y = y(t)$ para abreviar. Ahora de acuerdo a la definición (5),

$$\int_{\tilde{\sigma}} f(z)\, dz = \int_1^4 f(\tilde{\sigma}(t))\tilde{\sigma}'(t)\, dt; \;\; \tilde{\sigma}'(t) = 1 + i$$

$f(\tilde{\sigma}(t)) = z^3(\tilde{\sigma}(t)) = t^3 - 3tt^2 + i(3t^2t - t^3) = -2t^3 + 2t^3 i$
$f(\tilde{\sigma}(t))\tilde{\sigma}'(t) = (-2t^3 + 2t^3 i)(1+i) = 2t^3(-1+i)(1+i) = 2t^3(-2) = -4t^3$

$$\int_{\tilde{\sigma}} f(z)\, dz = -4\int_1^4 t^3\, dt = -4(\frac{t^4}{4})_1^4 = -(256-1) = -255$$
$Re\{I\} = -255, \ \ Im\{I\} = 0$

(b) $\sigma(t) = (1+i)t^2 = t^2 + it^2, \ \ t \in [1,2]$
$\sigma'(t) = 2t(1+i) = 2t + 2ti$
$f(\sigma(t)) = t^6 - 3t^6 + i(3t^6 - t^6) = -2t^6 + i(2t^6)$
$f(\sigma(t))\sigma'(t) = 2t^6(-1+i)\cdot 2t(1+i) = 4t^7(-2) = -8t^7$

$$\int_\sigma f(z)\, dz = 8\int_1^2 t^7\, dt = -8\left(\frac{t^8}{8}\right)_1^2 = -(256-1) = -255$$
$Re\{I\} = -255, \ \ Im\{I\} = 0$

(c) Obsérvese que $\begin{array}{l} \alpha : [1,2] \longrightarrow [1,4] \\ t \longrightarrow t^2 \end{array}$

Por tanto $\sigma(t) = \tilde{\sigma}(\alpha(t)) = \tilde{\sigma}(t^2) = (1+i)t^2, \ \ t \in [1,2]$
$\Rightarrow$ $\tilde{\sigma}$ es una parametrización de $\mathcal{C}$ con $\alpha'(t) = 2t > 0$ si $t \in [1,2]$
$\Rightarrow \int_\sigma f(z)\, dz = \int_{\tilde{\sigma}} f(z)\, dz$

Problema 2
Calcular $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z}$ con C curva descrita por $\sigma(t) = e^{it}, \ \ t \in [0, 2\pi]$.

(Obsérvese que se puede denotar también $\displaystyle\int_{t\in[0,2\pi]} e^{it}\, \frac{dz}{z}$).

Solución
$\sigma(t) = e^{it}, \ t \in [0, 2\pi]$ describe una vuelta de la circunferencia unitaria de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ en sentido $(+)$, puesto que $\sigma(t) = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$, $|e^{it}| = 1$ y $t \in [0, 2\pi]$. (Por lo tanto, de ahora en adelante, cada vez que se escriba la función $\sigma(t) = e^{it}, \ \ t \in [0, 2\pi]$ esto es equivalente a $|z| = 1\ (+)$ y sabremos que es una circunferencia de ecuación cartesiana $x^2 + y^2 = 1$ en sentido $(+)$ y se puede poner $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z}$).

$\sigma'(t) = ie^{it}$, $f(z) = \frac{1}{z} \Rightarrow f(\sigma(t)) = e^{-it}$

$f(\sigma(t))\sigma'(t) = e^{-it} i e^{it} = i$

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi i.$$

Problema 3
Calcular $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z}$ con C curva descrita por $\sigma(t) = e^{-it}, \ \ t \in [0, 2\pi]$.

Solución
Análogo al anterior $= -2\pi i$ (demuéstrelo)

Problema 4
Calcular $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} x\, dz$, C es el segmento de recta que va desde $0 + 0i$ hasta $4 + 3i$.

Solución
$\sigma(t) = (4+3i)t, \;\; t \in [0,1]$
$\sigma'(t) = 4+3i$
$f(z) = x \Rightarrow f(\sigma(t)) = 4t$

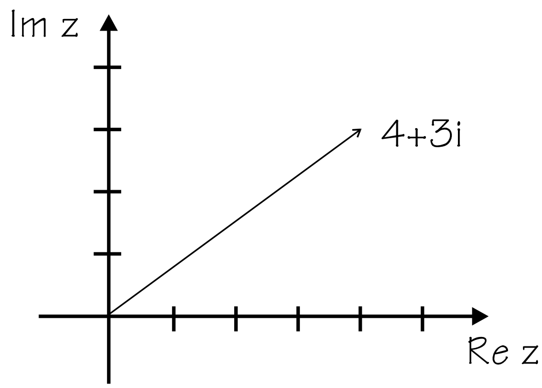


Figura 12.6:

$f(\sigma(t))\sigma'(t) = 4t(4+3i)$

$I = 4(4+3i)\displaystyle\int_0^1 t\; dt = 4(4+3i)\left(\frac{t^2}{2}\right)_0^1 = 2(4+3i) = 8+6i$

Problema 5
Calcular $\displaystyle\int_0^1 e^{at}\cos{(bt)}\; dt$; $\displaystyle\int_0^1 e^{at}\,\text{sen}\,(bt)\; dt$ con $a, b \;\in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, utilizando exclusivamente la teoría de funciones de variable compleja.

Solución
Tales integrales pueden calcularse por el método de “integración por partes” estudiado en cursos anteriores, sin embargo, aquí queremos utilizar funciones de variable compleja para su resolución.
A tal efecto, sea $\alpha = a+bi, \;\; e^{\alpha} = e^{a+bi} = e^{a}cis(b)$. Por tanto $e^{\alpha} = e^{a}(\cos b + i\,\text{sen}\,b)$, $e^{\alpha t}(\cos{(bt)} + i\,\text{sen}\,(bt))$.
Y observemos que
$e^{at}\cos{(bt)} = Re\{e^{\alpha t}\}$
$e^{at}\,\text{sen}\,(bt) = Im\{e^{\alpha t}\}$
por lo tanto
$\displaystyle\int_0^1 e^{at}\cos{(bt)}\; dt = \int_0^1 Re\{e^{\alpha t}\}\; dt$
$\displaystyle\int_0^1 e^{at}\,\text{sen}\,(bt)\; dt = \int_0^1 Re\{e^{\alpha t}\}\; dt$
Ahora bien, $\displaystyle\int_0^1 e^{\alpha t}\; dt = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha t})_0^1 = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha}-1) = \frac{1}{a+bi}[e^{a}\cos b + ie^{a}\,\text{sen}\,b - 1]$
$\displaystyle\frac{e^{a}\cos b - 1 + ie^{a}\,\text{sen}\,b}{a+bi} = \frac{[(e^{a}\cos b - 1) + ie^{a}\,\text{sen}\,b](a-bi)}{a^2+b^2} =$
$\displaystyle\frac{e^{a}(a\cos b + b\,\text{sen}\,b) - a}{a^2+b^2} + i\frac{e^{a}(a\,\text{sen}\,b - b\cos b) + b}{a^2+b^2}$

En conclusión

$$\int_0^1 e^{at}\cos(bt)\,dt = \int_0^1 Re\{e^{\alpha t}\}\,dt = \frac{e^a(a\cos b + b\,\mathrm{sen}\,b) - a}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^1 e^{at}\,\mathrm{sen}\,(bt)\,dt = \int_0^1 Im\{e^{\alpha t}\}\,dt = \frac{e^a(a\,\mathrm{sen}\,b - b\cos b) + b}{a^2+b^2}$$

Problema 6
Utilizar funciones de variable compleja para calcular:

$I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos(2x)\,dx$

$I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x\,\mathrm{sen}\,(2x)\,dx$

Solución
Observe que $xe^{2ix} = x(\cos 2x + i\,\mathrm{sen}\,2x)$ entonces
$I_1 = Re\left\{\displaystyle\int_0^{\pi/2} xe^{2ix}\,dx\right\},\quad I_2 = Im\left\{\displaystyle\int_0^{\pi/2} xe^{2ix}\,dx\right\}$
y calcule finalmente I_1 e I_2 por “integración por partes”de xe^{2ix} (admitimos que aquí también es válido), para llegar a:
$I_1 = -\frac{1}{2},\quad I_2 = \frac{\pi}{4}$

Problema 7
Hallar partes real e imaginaria de $I = \displaystyle\int_{\substack{\sigma(t)=it^3,\\ t\in[1,3]}} \cos z\,dz$

Solución
$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longrightarrow f(z) = \cos z.$ f es contínua en A por lo tanto por el Teorema fundamental del Cálculo, existe F, $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, Analítica (Por tanto F' contínua en $\mathbb{C}$) tal que $F'(z) = f(z)$, $F(z) = \mathrm{sen}\,z$ (obviamente). Ahora, $\sigma(1) = \mathcal{A} = i$; $\sigma(3) = \mathcal{B} = 27i$. Por lo tanto, $I = F(\mathcal{B}) - F(\mathcal{A}) = [\,\mathrm{sen}\,(27i) - \mathrm{sen}\,(i)] = i[\,\mathrm{senh}\,(27) - \mathrm{senh}\,(1)]$.
Luego $Re\{I\} = 0$, $Im\{I\} = \mathrm{senh}\,(27) - \mathrm{senh}\,(1)$

Problema 8
Demuestre que $I = \displaystyle\oint_{\mathcal{C}=(*)} x\,dz = i.$
(*)C es el borde del cuadrado unitario del dibujo anexo.

Solución
Aquí $f(z) = x + 0i$ es contínua en $\mathbb{C}$. La curva C es la unión de los cuatro lados del cuadrado
l_1 descrito por $\sigma_1(t) = t + 0i,\ t\in[0,1]$
l_2 descrito por $\sigma_2(t) = 1 + (t-1)i,\ t\in[1,2]$
l_3 descrito por $\sigma_3(t) = (3-t) + i,\ t\in[2,3]$
l_4 descrito por $\sigma_4(t) = 0 + (4-t)i,\ t\in[3,4]$

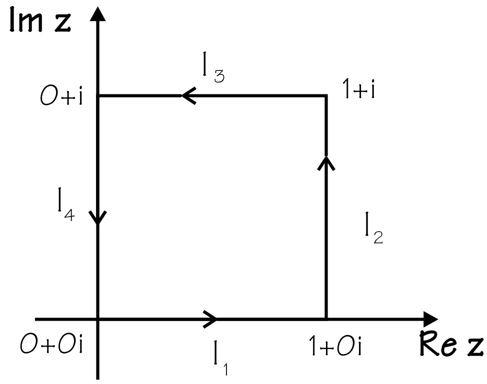


Figura 12.7:

de manera que $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$.
Demuestre que $I = 1/2 + i - 1/2 + 0 = i$
Por tanto $Re\{I\} = 0,\ Im\{I\} = 1$

Problema 9
Calcular $I = \oint_{|z|=1} z \operatorname{sen}(z^2)\, dz$

Solución
$f(z) = z \operatorname{sen}(z^2)$ es función contínua sobre $\mathbb{C}$. Por teorema fundamental del cálculo, tenemos que $I = F(\sigma(b)) - F(\sigma(a))$, con una F primitiva de f, en efecto $F(z) = -\frac{1}{2}\cos(z^2)$ y $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ con F' contínua $F'(z) = f(z)$. Luego $I = F(\sigma(b)) - F(\sigma(a)) = F(\sigma(2\pi)) - F(\sigma(0))$ y con $\sigma(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t = e^{it}$
$\sigma(2\pi) = 1,\ \sigma(0) = 1$.
Por tanto, $I = F(1) - F(1) = 0 + 0i$.

Problema 10
Sea C una curva simple (no tiene auto-intersecciones) y cerrada ($\sigma(a) = \sigma(b)$), descrita por
$\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Sea además
$f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, analítica en los puntos de C y en el interior de C. Sea además f' contínua en C y en int$C$.
Demuestre que $\oint_C f(z)\, dz = 0 + 0i = O$ con δC orientada según la orientación exigida por el Teorema de Green.

Solución
Recordemos el Teorema de Green:

$$\oint_{\mathcal{C}=\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int_{D=int(\mathcal{C})} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right)$$

con P y Q $in\mathcal{C}^{\infty}(C \cup D)$ (es decir, P y Q son funciones con las primeras derivadas parciales contínuas en $\mathcal{C}$ y en $int\mathcal{C}$). $\partial\mathcal{C}$ orientada de tal manera que al recorrer $\partial\mathcal{C}$ en el sentido de esa orientación, la región $int(\mathcal{C})$ queda siempre a la izquierda del caminante. Ahora bien, por las hipótesis del ejercicio, f es derivable en $\mathcal{C}$ y en $int(\mathcal{C})$. Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ por lo tanto existen u_x, u_y, v_x, v_y contínuas en $\mathcal{C}$ e $int(\mathcal{C})$. Ahora, por hipótesis f' es contínua en $\mathcal{C}$ e $int(\mathcal{C})\ \Rightarrow U_x, U_y, V_x, V_y$ son contínuas en $\mathcal{C}$ e $int(\mathcal{C})(I)$, y por ser f analítica allí, se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann.

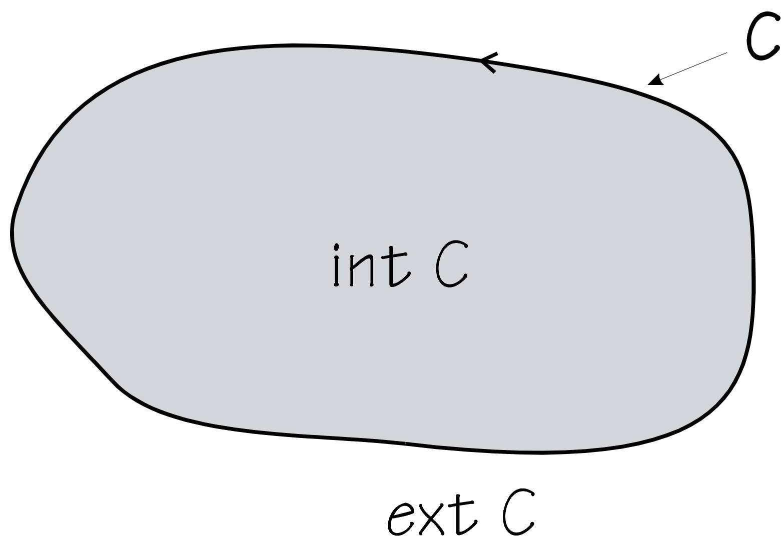


Figura 12.8:

Veamos

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_C udx - vdy + \int_C vdx + udy \quad (II)$$

(que es el resultado importante que sigue a la definición 5 de este capítulo).
Pero por (I) aplicamos el Teorema de Green a cada integral del 2do miembro de (II):

$$\oint_C f(z)\,dz = \int\int_D \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\int\int_D \left(\frac{\partial(u)}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

pero $(C-R) \Rightarrow U_x = V_y,\ U_y = -V_x$
Por lo tanto

$$\oint_C f(z)\,dz = \int\int_D \left(-\frac{\partial(v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\int\int_D 0$$

ss $\oint_C f(z)\,dz = \int\int_D 0 + i\int\int_D 0 = 0 + 0i = O$ como queríamos.
Este resultado lo mostraremos en el próximo capítulo como Teorema de Cauchy.

Capítulo 13

Teorema de Cauchy. Aplicaciones

Objetivos: El alumno debe manejar con soltura el Teorema de Cauchy y sus aplicaciones. En particular debe entender perfectamente el Teorema de deformación, toda vez que será de mucha utilidad en los capítulos siguientes.

Teorema 9 (Teorema de Cauchy) *Sea $\mathcal{C}$ una curva de Jordan (una curva simple y cerrada) descrita por $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Sea $f : A(\text{abierto}) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que f es analítica en los puntos de $\mathcal{C}$ y en Int($\mathcal{C}$) (el interior de $\mathcal{C}$). Suponer además que f' es continua en $\mathcal{C}$ y en Int($\mathcal{C}$). Entonces:*

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = O = 0 + 0i$$

Observación 2 *La demostración del teorema es el ejercicio 10 del capítulo 12*

Corolario 4 *Sea $A \subset \mathbb{C}$, A simplemente conexo, $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, f analítica y f' continua en A. Entonces $\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = O$ para toda curva de Jordan $\mathcal{C}$ en A.*

El alumno debe convencerse de que el siguiente corolario es una consecuencia del teorema de Cauchy.

Corolario 5 *Sea $A \subset \mathbb{C}$, A simplemente conexo, $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, f analítica y f' continua en A. Sean w_1 y w_2 dos complejos cualesquiera en A y sea $\mathcal{C}$ una curva simple que una w_1 con w_2 descrita por $\sigma : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Entonces $\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz$ no depende de C. Es decir, basta elegir cualquier curva simple $\mathcal{C}^*$ que vaya de w_1 a w_2 en A y se tendrá $\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \int_{\mathcal{C}^*} f(z)\,dz$*

Observación 3 *Basta tomar $C = \mathcal{C} \uplus \mathcal{C}^*$ (unión disjunta) descrita por $\sigma - \sigma^*$ y aplicar el teorema de Cauchy.*

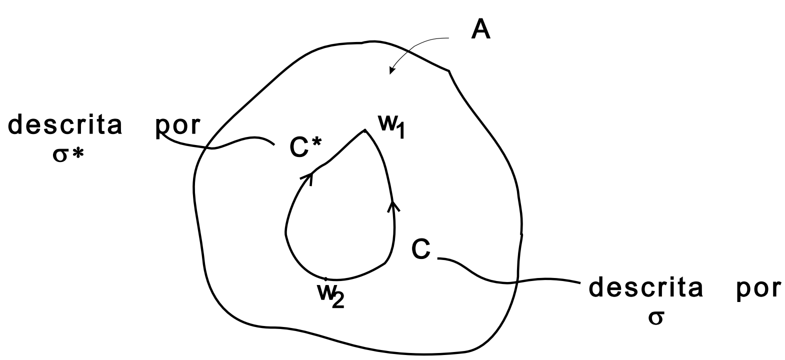


Figura 13.1:

Notación: $\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \int_{\mathcal{C}^*} f(z)\,dz = \int_{w_1}^{w_2} f(z)\,dz$

Teorema 10 (Teorema de Deformación) *Sean C_1 y C_2 dos curvas de Jordan tales que tengan la misma orientación y una de ellas, por ejemplo C_1, contenida completamente en int C_2. Sea $f : B(\text{abierto}) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica sobre las dos curvas y en la región A comprendida entre ellas, con f' contínua en C_1, C_2 y en A.*

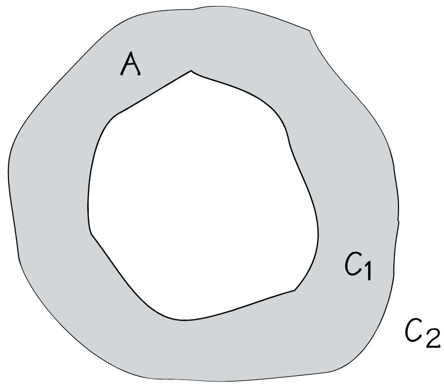


Figura 13.2:

Entonces $\displaystyle\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$

Observación 4 *Si se elige el sentido antihorario, entonces* $\displaystyle\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$ *(ambas integrales en sentido antihorario) y si el sentido elegido es el horario, entonces* $\displaystyle\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$ *(ambas en sentido horario).*
El Teorema se llama de deformación porque es como si C_2 se deformara hasta llegar a C_1

Teorema 11 (Generalización del Teorema de Deformación) *Sean $C, C_1, \ldots, C_n,\ n < \infty$, curvas de Jordan con la misma orientación y $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\} \subset C$ pero $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} C_i = \Phi$. Sean, además, A la región entre las n curvas C_i y $f : B \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica en C, en las C_i y en A con f' contínua en C, en las C_i y en A. Entonces*

$$\oint_{C} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)\,dz$$

13.1 Ejercicios Resueltos

Problema 1
Calcular $\displaystyle\oint_{|z-a|=r} \frac{dz}{z-a}$ (sentido antihorario), con $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C},\ r \in \mathbb{R}$.

Solución
$|z-a| = r$ representa a una circunferencia de centro $a = (a_1, a_2)$ como punto en $\mathbb{R}^2$ y radio real r.
En efecto, $|z-a| = r \Longleftrightarrow |x + iy - (a_1 + ia_2)| = r \Longleftrightarrow |x - a_1 + i(y - a_2)| = r \Longleftrightarrow \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} = r \Longleftrightarrow (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = r^2$.
Ahora bien, no podemos usar el teorema de las primitivas, toda vez que una posible primitiva para f,

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & f(z) = \dfrac{1}{z-a} \end{array}$$

es $F(z) = \log(z-a)$, pero F no está definida en $z = a$ y Dom(f) no es simplemente conexo (es conexo pero tiene un hueco).

Por esta razón, trataremos de calcular la integral dada a partir de la definición: $\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)\,dt,\ \sigma : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ una parametrización de C y f continua en $\mathbb{C}\backslash\{a\}$.
Ahora, una parametrización de $|z-a| = r$ (recorrida en sentido antihorario) es $\sigma(t) = a + re^{it} = a_1 + a_2 i + r(\cos t + i \operatorname{sen} t) = (a_1 + r\cos t) + i(a_2 + r \operatorname{sen} t),\ t \in [0, 2\pi],\ r \in \mathbb{R}$. Así $x(t) = a_1 + r\cos t,\ y(t) = a_2 + r \operatorname{sen} t$ y $(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = r^2$.
Entonces, $f(\sigma(t)) = \dfrac{1}{\sigma(t)-a} = \dfrac{1}{re^{it}};\ \sigma'(t) = ire^{it};\ f(\sigma(t))\sigma'(t) = i;\ \oint_{|z-a|=r} \dfrac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i$.
De aquí en adelante, cada vez que nos aparezca la integral $\oint_{|z-a|=r} \dfrac{dz}{z-a}$ con C en sentido antihorario, sabremos que vale $2\pi i$ y que la curva en cuestión es una circunferencia con centro (a_1, a_2) y radio r.

Problema 2
Sea C_2 una curva de Jordan cualquiera y $a \in$ int(C_2) (el interior de C_2). Calcular $\oint_{C_2} \dfrac{dz}{z-a}$, con C_2 en sentido antihorario o positivo.

Solución
Primero, consideremos la circunferencia C_1 de centro a y radio ε_1, con ε_1 escogido de tal manera que C_1 esté contenida íntegramente en el interior de C_2. Además, le damos a C_1 la misma orientación de C_2 (antihoraria).

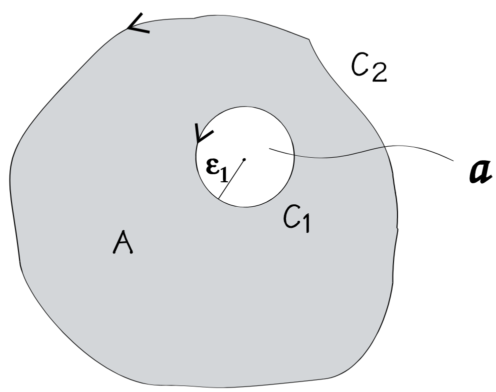


Figura 13.3:

Sea A la región comprendida entre C_2 y C_1 y $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$. f es analítica en $\mathbb{C}\backslash\{a\}$ puesto que f es una función racional cuyo denominador sólo se anula en $z = a$. Ahora, por la construcción de A, f es analítica en A, en C_2 y en C_1 y $f'(z) = -\dfrac{1}{(z-a)^2}$ es continua en A, C_2 y C_1 (puesto que el punto de discontinuidad de f' está fuera de estos conjuntos). Finalmente, por el teorema de deformación, $\oint_{C_2} \dfrac{dz}{z-a} = \oint_{C_1} \dfrac{dz}{z-a}$ y como C_1 viene dada por $|z-a| = \varepsilon_1$ entonces el valor de ambas integrales es $2\pi i$ (Gracias al ejercicio 1).

Problema 3
Calcular $\int_C \dfrac{dz}{z-3-2i}$, siendo C el cuadrado de vértices $0+0i,\ 4+0i,\ 4+4i,\ 0+4i$, recorrido en sentido horario

Solución
Consideramos la circunferencia C_1 de centro $3+2i$ y radio ε_1 adecuado para que C_1 quede íntegramente en el

interior de C y con la misma orientación (horaria).

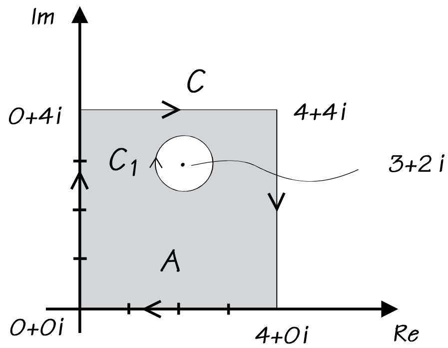


Figura 13.4:

$f(z) = \dfrac{1}{z-(3+2i)}$ es analítica en $\mathbb{C}\backslash\{3+2i\}$ por ser f racional; $f'(z) = -\dfrac{1}{[z-(3+2i)]^2}$ es continua en A, C_1, C y f es analítica en A, C_1, C. Cumplidas entonces las condiciones del teorema de deformación, se tiene que $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z-(3+2i)} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z-(3+2i)} = -\oint_{C_1^*} \frac{dz}{z-(3+2i)} = -2\pi i$, donde C_1^* es la misma curva C_1 pero recorrida en sentido contrario: sentido antihorario.

Problema 4

Calcular $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z-3-2i}$, con C la circunferencia dada por $|z|=1$, recorrida en sentido antihorario.

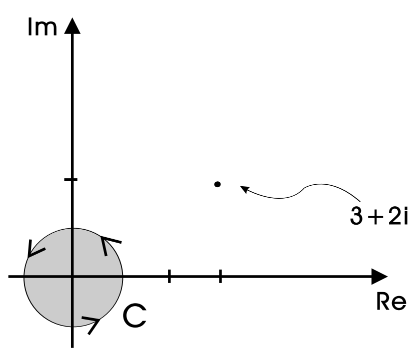


Figura 13.5:

Solución

Observe que $f(z) = \dfrac{1}{z-(3+2i)}$ es la misma función del ejercicio anterior; es analítica en $\mathbb{C}\backslash\{3+2i\}$ por ser función racional. Así $f(z)$ es analítica en $|z|=1$ y, también, en int C. Asimismo, $f'(z) = -\dfrac{1}{[z-(3+2i)]^2}$ es función racional en $\mathbb{C}\backslash\{3+2i\}$ y, por tanto, continua en C y en int C. Finalmente, aplicando el teorema de Cauchy: $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z-(3+2i)} = O$ (Obsérvese que $(3+2i) \notin$ int C).

Problema 5

Calcular $\oint_C \frac{3z-2}{z^2-z}dz$, siendo C la curva determinada por $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$, recorrida en sentido antihorario.

Solución

$z^2-z=z(z-1)=0 \iff \begin{array}{rcl} z_1 & = & 0 \\ z_2 & = & 1 \end{array}$

Luego, $f(z)=\frac{3z-2}{z(z-1)}$ (función racional) es analítica en $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. Obsérvese que z_1 y z_2 están en int C (y, por tanto, no se puede aplicar el teorema de Cauchy).

Consideremos circunferencias C_1, de radio ε_1 y centro 0, y C_2, centrada en 1 y con radio ε_2 tales que C_1 y C_2 estén en int C pero $C_1 \bigcap C_2=\emptyset$, recorridas (ambas) en sentido antihorario.

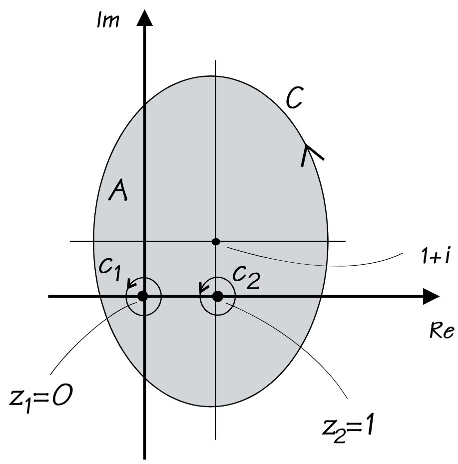


Figura 13.6:

Ahora, $f'(z)=\frac{-3z^2+4z-2}{z^2(z-1)^2}$, al ser, de nuevo, función racional, es continua en C, C_1, C_2 y en A, siendo A la región comprendida entre C, C_1 y C_2. (Obsérvese que también f es analítica en C, C_1, C_2 y en A). Así, aplicando el teorema de deformación generalizado tenemos:

$$\oint_C f(z)\,dz=\oint_{C_1} f(z)\,dz+\oint_{C_2} f(z)\,dz$$

Ahora,

$$\begin{array}{llll} f(z)=\frac{3z-2}{z(z-1)}\equiv\frac{B}{z}+\frac{D}{z-1} & \iff & 3z-2\equiv B(z-1)+Dz & \\ \iff 3z-2\equiv(B+D)z-B & \iff & \left.\begin{array}{rcl} B+D & = & 3 \\ B & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow & \begin{array}{rcl} B & = & 2 \\ D & = & 1 \end{array} \end{array}$$

Así, $\frac{3z-2}{z(z-1)}=\frac{2}{z}+\frac{1}{z-1}$, de donde

$$\oint_C f(z)\,dz=\underbrace{2\oint_{C_1}\frac{dz}{z}}_{2(2\pi i)}+\underbrace{\oint_{C_1}\frac{dz}{z-1}}_{0}+\underbrace{2\oint_{C_2}\frac{dz}{z}}_{0}+\underbrace{\oint_{C_2}\frac{dz}{z-1}}_{2\pi i}=6\pi i$$

Problema 6

Calcular $\oint_C \dfrac{z^3 e^{2z}\cos z}{(z^2+9)(z^2+16)}dz$, siendo C el borde del cuadrado de vértices $0,\ 1,\ 1+i,\ i$, recorrido en sentido horario.

Solución

Sea $f(z) = \frac{z^3 e^{2z}\cos z}{(z+3i)(z-3i)(z+4i)(z-4i)}$

Obsérvese que los puntos que anulan al denominador de esta función están fuera de C y de int C y que f es un cociente entre un producto de funciones elementales y un polinomio. Por lo tanto, f es analítica en $\mathbb{C}\backslash\{3i,\ -3i,\ 4i,\ -4i\}$.

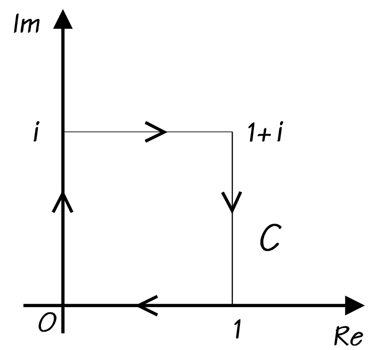


Figura 13.7:

f' existe y, su denominador, que es lo que nos importa ahora, es $(z^2+9)^2(z^2+16)^2$. Luego, f' es continua en el dominio de f. Aplicando el teorema de Cauchy, obtenemos:

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

Capítulo 14

Fórmulas de Cauchy

Objetivos: El alumno debe aprender a manejar las fórmulas de Cauchy para las derivadas y aplicarlas correctamente a los ejercicios.

14.1 Teoremas

Teorema 1: **Fórmula integral de Cauchy.**
Sea $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ f$ analítica, C una curva de Jordan en A con sentido positivo (contrario a las agujas del reloj), sea además Int$C \subset A.$ Entonces, para cada

$$w \in \mathrm{Int}C,\ f(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-w}dz$$

El resultado del teorema es sumamente importante, nos dice que los valores de una función f analítica, en el interior de una curva C de Jordan, $(f(w))$, se conocen si se conocen los valores de f en C (este es $f(z)$ con $z \in C$). Ahora bien, la condición "Int$C \subset A$" se podría obviar si exigimos que A sea simplemente conexo. (Así A no tendrá huecos).

Sin embargo, tiene muchas aplicaciones el teorema 1 despejando la integral:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-w}dz = 2\pi i f(w),\ w \in \mathrm{Int}C$$

Teorema 2: **Fórmula de Cauchy para las derivadas**

Sea f una función analítica en una región $A \subset \mathbb{C}$ y C una curva de Jordan contenida en A, e Int$C \subset A$ y tal que para cada $w \in$Int$C$, entonces, f admite derivadas de cualquier orden, las cuales vienen dadas por

$$\frac{d^n f(w)}{dw^n} = f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}dz$$

Nótese que la condición Int$C \subset A$ se podría obviar si se exigiese que A fuese simplemente conexo. Además, el teorema nos afirma que al ser f analítica en A, existen infinitas derivadas para f, cosa que no ocurre para $f : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Además, despejando la integral:

$$\oint_{C,w\in\mathrm{Int}C} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(w)$$

con esta fórmula y la del teorema 1 tenemos poderosas herramientas para calcular otro tipo de integrales.

Observe que hasta ahora sólo podíamos calcular integrales de los tipos siguientes:

1. $\displaystyle\int_C f(z)dz$ a partir de la definición.

2. $\displaystyle\oint_C f(z)dz = 0$ si se satisface el teorema de Cauchy.

3. $\displaystyle\oint_{|z-a|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$ (o $-2\pi i$ si el sentido es negativo).

4. $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$
si el sentido es positivo y $-2\pi i$ si el sentido es negativo, con C una curva de Jordan con $a \in$Int$C$.

5. Con el teorema 1 podemos calcular una integral $\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{z-w}dz,$ f analítica, C curva de Jordan en sentido positivo con Int$C \subset A$, entonces, para cada $w \in$Int$C$, $\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{z-w}dz = 2\pi i f(w)$.

6. Con el teorema 2 podemos calcular una integral $\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}dz,$ f analítica, C una curva de Jordan en sentido positivo con Int$C \subset A$, entonces, para $w \in$Int$C$, $\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(w)$.

Todos estos resultados los podemos entrelazar entre si y tener potentes herramientas para el cálculo de integrales complejas muy complicadas.

Ahora exhibimos un importante resultado: *Teorema 3:* **Teorema de Morera**

Sea $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},$ A región simplemente conexo y f es continua en A. Si además $\displaystyle\oint_C f(z)dz = 0$ para toda curva de Jordan C en A, se concluye que f es analítica en A.

Este teorema puede ser puede ser usado para aquellos casos en que se quiera comprobar que una función f dada es analítica en A y f cumple las condiciones del mismo, siendo además, f una función muy complicada para analizar las condiciones de analiticidad.

14.2 Ejercicios Resueltos

Problema 1

Calcular ReI y ImI con $I = \displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z+1}{z^2-4z+13}dz$ sentido positivo.

Solución

$z^2 - 4z + 13 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \dfrac{4 \pm 6i}{2}$

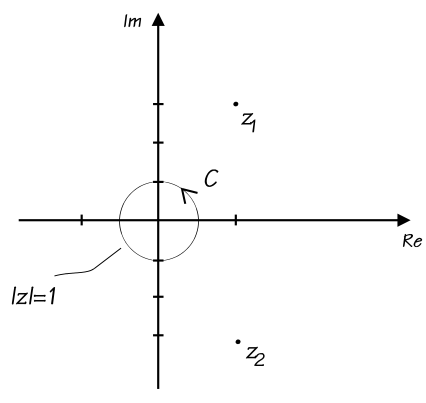


Figura 14.1:

$z_1 = 2+3i,$ $z_2 = 2-3i$ como $f(z) = \frac{z+1}{z^2-4z+13}$ es una función racional, es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{z_1,\ z_2\}$ pero $z_1,\ z_2 \notin C$ y $z_1,\ z_2 \notin$Int$C$ por lo tanto f es analítica en C y en Int$C$. Además, $f'(z)$ (que tiene por denominador $(z^2-4z+13)^2$) es función racional con Dom$f' =$Dom$f$ por lo tanto f' es continua en C y en Int$C$ y por el teorema de Cauchy de la clase 13, $I = 0 + 0i$.

Problema 2

Calcular ReI y ImI con $I=\oint_{|z|=5}\dfrac{z+1}{z^2-4z+13}dz$

Solución

Obsérvese que aquí el radio de C es 4 luego tanto $z_1=2+3i$ como $z_2=2-3i$ están en el Int$C$ ($|z_1-0|=|z_1|=$

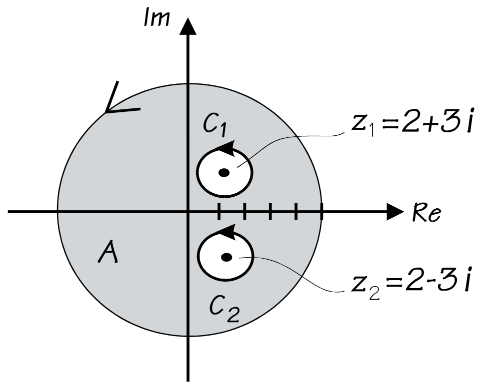


Figura 14.2:

$\sqrt{13}<4$ y $|z_2-0|=|z_2|=\sqrt{13}<4$).

Entonces no podemos aplicar el teorema de Cauchy, pero si el de deformación (en su forma generalizada, ver clase 13). Describir $C_1(z_1,\epsilon_1);\ C_2(z_2,\epsilon_2)$ con ϵ_1 y ϵ_2 reales tales que $C_1\cap C_2=\emptyset$ y $C_1,\ C_2$ están contenidos íntegramente en C. Sea A la región entre $C,\ C_1$ y C_2. Es evidente que al no estar z en $C,\ C_1,\ C_2,\ f$ que es racional, será analítica en $C,\ C_1,\ C_2$ y A así mismo f' que también es racional (lo vimos en el ejercicio anterior) será continua allí.

Por lo tanto $\oint_C f(z)dz=\oint_{C_1}f(z)dz+\oint_{C_2}f(z)dz$. Ahora,

$f(z)=\dfrac{z+1}{[z-(2+3i)][z-(2-3i)]}=(z+1)\dfrac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$ y $\dfrac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}=\dfrac{B}{(z-z_1)}+\dfrac{D}{z-z_2}\Leftrightarrow 1\equiv B(z-z_2)+D(z-z_1)$ si $z=z_2\Rightarrow 1=D(z_2-z_1)=D[2-3i-(2+3i)]$, y si $z=z_1\Rightarrow 1=B(z_1-z_2)=B[2+3i-(2-3i)]\ \Rightarrow D=-\dfrac{1}{6i};\ B=\dfrac{1}{6i}$. por lo tanto $f(z)=(z+1)\left(\frac{\frac{1}{6i}}{z-(2+3i)}-\frac{\frac{1}{6i}}{z-(2-3i)}\right)=\frac{\frac{z+1}{6i}}{[z-(2+3i)]}-\frac{\frac{z+1}{6i}}{z-(2-3i)}=\frac{g_1(z)}{z-w_1}+\frac{g_2(z)}{z-w_2}$ con $g_1(z)=\frac{z+1}{6i},\ g_2(z)=-\frac{z+1}{6i},\ w_1=2+3i,\ w_2=2-3i.$

Ahora podemos aplicar la forma generalizada del teorema de deformación con g_1 y g_2 analítica en $C,\ C_1,\ C_2$ y A, luego se concluye que:

$$\oint_{|z|=5}\frac{z+1}{z^2-4z+13}dz=\underbrace{\oint_{C_1}\frac{g_1(z)}{z-w_1}dz}_{2\pi i g_1(w_1)}+\underbrace{\oint_{C_1}\frac{g_2(z)}{z-w_2}dz}_{0}+\underbrace{\oint_{C_2}\frac{g_1(z)}{z-w_1}dz}_{0}+\underbrace{\oint_{C_2}\frac{g_2(z)}{z-w_2}dz}_{2\pi i g_2(w_2)}$$

las integrales segunda y tercera son nulas por el teorema de Cauchy (analícelas). Mientras que en las integrales primera y cuarta se aplica el teorema 1 de la clase 14 (fórmula integral de Cauchy).

$$\oint_C f(z)dz=\oint_{|z-(2+3i)|<\epsilon_1}\frac{\frac{z+1}{6i}}{z-(2+3i)}dz+\oint_{|z-(2-3i)|<\epsilon_2}\frac{-\frac{z+1}{6i}}{z-(2-3i)}dz=$$

$$=2\pi i g_2(w_2)+2\pi i g_1(w_1)=\frac{2\pi i}{6i}(2+3i+1)-\frac{2\pi i}{6i}(2-3i+1)=2\pi i$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}I=0,\ \mathrm{Im}I=2\pi.$$

Problema 3

Calcular ReI y ImI con $I = \oint_C \frac{z+1}{z^2-4z+13}dz$

Solución

Aquí $z_1 = 2+3i \in$Int$C,\ z_2 = 2-3i \notin$Int$C$ y $z_2 \notin C$. Luego, por el ejercicio anterior,

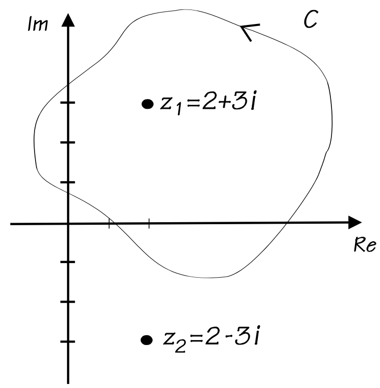


Figura 14.3:

$$f(z) = \frac{z+1}{[z-(2+3i)][z-(2-3i)]} = \frac{\frac{z+1}{z-(2-3i)}}{z-(2+3i)} =$$

$= \frac{f_1(z)}{z-(2+3i)}$ con $f_1(z) = \frac{z+1}{[z-(2-3i)]}$ y f_1 analítica en $\mathbb{C} \setminus \{2+3i\}$ y $w = 2+3i \in C,\ C$ curva de Jordan en $\mathbb{C} \setminus \{2+3i\}$, luego

$$I = \oint_C \frac{f_1(z)}{z-w}dz = 2\pi i f_1(w)$$

por el teorema 1 (clase 14, fórmula integral de Cauchy). Por lo tanto,

$$I = 2\pi i \frac{2+3i+1}{2+3i-2+3i} = \frac{2\pi i(3+3i)}{6i}$$

$$\Rightarrow I = (1+i)\pi \Rightarrow \mathrm{Re}I = \pi,\ \mathrm{Im}I = \pi.$$

Problema 4

Calcular $\oint_{|z+1-i|=2} \frac{z+4}{z^2+2z+5}dz$

Solución

Análogo al problema 3, $z^2+2z+5 = [z-(-1+2i)][z-(-1-2i)]$ con $|z+1-i| = |z-(-1+i)| = 2$, lo cual es la circunferencia de centro $(-1+i)$ y radio 2. Dibújela y sitúe $z_1 = -1-2i$ y $z_2 = -1+2i$ respecto de ella, verá que $z_2 = -1+2i \in$ int$C$ y $z_1 = -1-2i \notin C$ ni al int$C$. Luego, ponga $f(z) = \frac{f_1(z)}{z-z_2}$, ponga $w_2 = z_2$ y verifique las condiciones de la fórmula integral de Cauchy para concluir que

$$I = -2\pi i f_1(w) = -2\pi i \frac{-1+2i+4}{-1+2i+1+2i} = -\frac{\pi}{2}(3+2i).$$

Problema 5

Hallar ReI y ImI con $\oint_{\sigma(t)=2e^{it}+1,\ t\in[0,2\pi]} \frac{\cos z}{(z^2+1)^2}dz$, con sentido positivo

Solución

La curva aquí C viene parametrizada por $\sigma(t) = 2e^{it} + 1$. (El alumno puede demostrar que $\sigma(t) = a + re^{it}$, con $a \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}$ representa a una circunferencia de centro a y radio r. En efecto: ponga $a = a_1 + ia_2 \Rightarrow x(t) + iy(t) = a_1 + ia_2 + r(\cos t + i \operatorname{sen} t)$, de donde $x - a_1 = r\cos t,\ y - a_2 = r \operatorname{sen} t$, si se elevan al cuadrado y se suman se obtiene: $(x-a_1)^2 + (Y-a_2)^2 = r^2$.)

Por lo tanto C es una circunferencia de centro $(1+0i)$ y radio 2, una vuelta completa. C es una curva de Jordan

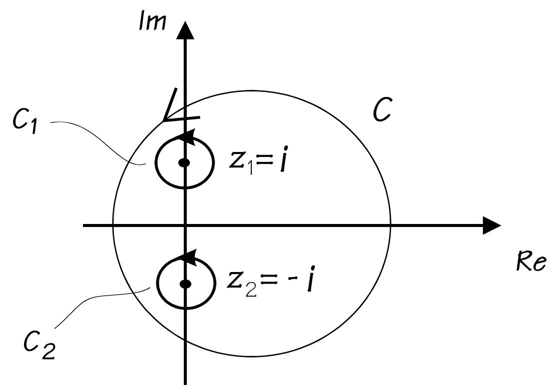


Figura 14.4:

$F(z) = \frac{\cos z}{(z^2+1)^2} = \frac{\cos z}{(z-i)^2(z+i)^2}$, F no es analítica en i ni en $-i$.

Se describen circunferencias $C_1(i,\epsilon_1),\ C2(-i,\epsilon_2)$ con $\epsilon_1,\ \epsilon_2$ tales que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ y $C_1,\ C_2 \subset$Int$C$ con la misma orientación (positiva). Se descompone

$$I = \int_{C_1} \frac{\cos z}{(z^2+1)^2}dz + \int_{C_2} \frac{\cos z}{(z^2+1)^2}dz$$

Sea $f_1(x) = \frac{\cos z}{(z+i)^2}$ y $f_2(x) = \frac{\cos z}{(z-i)^2}$

$$I = \oint_{C_1} \frac{f_1(z)}{(z-i)^2}dz + \oint_{C_2} \frac{f_1(z)}{(z+i)^2}dz$$

Ahora podemos aplicar el teorema 2 de la clase 14: Fórmula integral de Cauchy para las derivadas, puesto que f_1 es analítica en $B_1 = \mathbb{C}\backslash\{-i\}$, pero $-i \notin C_1$ y $-i \notin$IntC_1 (en un examen debe explicarse la analiticidad de f_1 en B_1). f_2 es analítica en $B_2 = \mathbb{C}\setminus\{-i\}$ pues $i \notin C_2$ e $i \notin$IntC_2 (Explique). Observa además que $i = w_1 \in$Int$C_1,\ -i = w_2 \in$IntC_2 y que $C_1,\ C_2$ son curvas de Jordan. Enuncie aquí el teorema 2 de la clase 14 para concluir que: existen $f_1'(w_1),\ f_2'(w_2)$ y que $I = \frac{2\pi i}{1!}f_1'(i) + \frac{2\pi i}{1!}f_2'(-i)$ (aquí $n+1 = 2 \Rightarrow n = 1$). Ahora

$$f_1'(z) = \frac{-(\operatorname{sen} z)(z+i)^2 - (\cos z)(z+i)}{(z+i)^4}$$

$$\Rightarrow f_1'(i) = \frac{-(\operatorname{sen} i)(2i)^2 - (\cos i)(2i)}{(2i)^4} = \frac{i[\operatorname{senh}(1) - \cosh(1)]}{4}$$

Demuestre que $f_2'(-i) = \frac{i[\cosh(1) - \operatorname{senh}(1)]}{4}$ Por lo tanto,

$$I = \frac{2\pi i}{4}[i\operatorname{senh}(1) - i\cosh(1) + i\cosh(1) - i\operatorname{senh}(1)] = 0 + 0i$$

Así que Re$I = 0$, Im$I = 0$.

Problema 6
Hallar ReI y ImI con $\oint_{\sigma(t)=2e^{it}+1,\ t\in[0,2\pi]} \frac{\text{sen } z}{(z^2+1)^2} dz$

Solución
Siguiendo el procedimiento análogo al ejercicio anterior, demostramos que

$$I = 2\pi i [f_1'(i) + f_2'(-i)]$$

con

$$f_1(z) = \frac{\text{sen } z}{(z+i)^2},\ f_2(z) = \frac{\text{sen } z}{(z-i)^2}$$

$$I = I_1 + I_2,\ I_1 = \oint_{C_1} \frac{f_1(z)}{(z-i)^2} dz,\ I_2 = \int_{C_2} \frac{f_2(z)}{(z+i)^2} dz.$$

$$f_1'(z) = \frac{1}{(z+i)^4}[(\cos z)(z+i)^2 - 2(\text{ sen } z)(z+i)],$$

$$f_1'(i) = \frac{1}{4}[-\cosh(1) + \text{ senh }(1)].$$

$$f_2'(z) = \frac{1}{(z-i)^4}[(\cos z)(z-i)^2 - 2(\text{ sen } z)(z-i)],$$

$$f_1'(-i) = \frac{1}{(-2i)^4}[(\cos(-i))(-2i)^2 - 2(\text{ sen }(-i)(-2i)] = \frac{1}{16}[-4\cosh(1) + 4\,\text{senh }(1)]$$

Por lo tanto,

$$I = \frac{2\pi i}{4}[\cosh(1) + \text{ senh }(1) - \cosh(1) + \text{ senh }(1)] \Rightarrow \text{Re}I = 0,\ \text{Im}I = \pi[\text{ senh }(1) - \cosh(1)].$$

Recordar que $\cos(-i) = \cos i = \cosh 1$ y que $\text{sen }(-i) = \frac{1}{2i}(e^{i(-i)} - e^{-i(-i)}) = \frac{1}{2\pi}(e^1 - e^{-1}) = \frac{1}{i}\,\text{senh }(1)$.

Problema 7
Hallar ReI y ImI con $\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^3+z} dz$

Solución

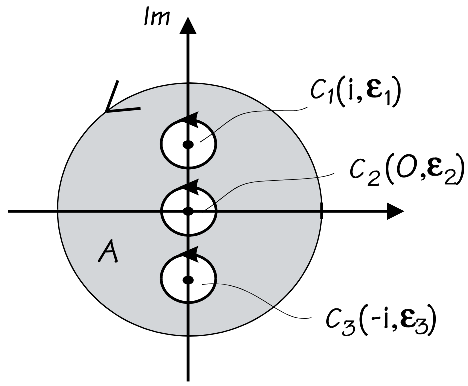


Figura 14.5:

$$\oint_C \frac{\cos z}{z(z^2+1)}dz = \oint_{C_1} \frac{\frac{\cos z}{z(z+i)}}{z-i}dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{\cos z}{z^2+i}}{z-0}dz + \oint_{C_3} \frac{\frac{\cos z}{z(z-i)}}{z+i}dz$$

con $C_1,\ C_2,\ C_3$ y C curvas de Jordan con la misma orientación, $\{C_1,\ C_2,\ C_3\} \subset C$ pero $\bigcap_{i=1}^{3} C_i = \emptyset$ cosa que se consigue eligiendo $\epsilon_1,\ \epsilon_3$ adecuadamente.

Sea además $f : B \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ f(z) = \dfrac{\cos z}{z(z^2+1)}$ analítica en $C,\ C_1,\ C_2,\ C_3,$ y en A la región entre ellas, por ser f cociente de función trigonométrica entre polinomio, y los ceros del polinomio, $i, 0$ y $-i$ estar fuera $C,\ C_1,\ C_2,\ C_3,$ y A. Además, $f'(z)$ es continua también en $C,\ C_1,\ C_2,\ C_3,$ y en A, por la misma razón. Luego, aplicando el teorema de deformación en su forma generalizada, podemos escribir la igualdad entre las integrales del comienzo de la solución (14.2). Ahora, el alumno debe revisar que en cada uno de los sumandos del segundo miembro de (14.2) se verifica el teorema 1 (Fórmula integral de Cauchy) y llegar entonces a que:

$$I = \oint_C \frac{\cos z}{z^3+z}dz = 2\pi i \left[\frac{\cos i}{i(2i)} + \frac{\cos 0}{0^2+1} + \frac{\cos(-i)}{(-i)(-2i)}\right] =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{\cosh(1)}{-2} + 1 + \frac{\cosh(-1)}{-2}\right) = 2\pi i[1-\cosh(1)]$$

por lo tanto se concluye que Re$I = 0$, Im$I = 2\pi[1-\cosh(1)]$.

Problema 8

Calcular $\displaystyle\oint_{|z-\frac{i}{2}|=1} \frac{\cos z}{z^3+z}dz$

Solución

$-2\pi i \left[1 - \dfrac{\cosh(1)}{2}\right].$

Problema 9

Calcular $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\cos z}{z^3+z}dz$

Solución

$2\pi i$

Problema 10
Demuestre que $\oint_{\sigma(t)=1+2e^{it}\,,\; t\in[0,2\pi]} \dfrac{\operatorname{sen} z}{(z-1)^3}dz = \pi i \operatorname{sen}(1)$

Solución
Se deja como ejercicio.

Problema 11
Calcular la parte imaginaria de $\oint_{|z|=0,05} \dfrac{\cos(3z)}{z^{85}}dz$, justifique todos sus pasos.

Solución
$f(z) = \cos(3z),\ f$ es función entera; C es circunferencia de centro 0 y radio $0,05$ por lo tanto la curva de Jordan en este caso el sentido es negativo; $w = 0 \in$Int$C$ luego por la fórmula integral de Cauchy, f tiene derivadas de cualquier orden y como $n + 1 = 85 \Rightarrow n = 84$, por lo tanto

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-0)^{84+1}}dz = -\frac{2\pi i}{(84)!}[f^{(84)}(z)]_{z=0}$$

Pero $f(z) = \cos(3z),\ f'(z) = -3\operatorname{sen}(3z), \ldots, f^{(4)}(z) = 3^4\cos(3z)$ y por inducción sobre n se llega a que $f^{(n)}(z) = 3^n\cos(3z)$ si n es múltiplo de cuatro, en nuestro caso $84 = 4\cdot 21 \Rightarrow f^{(21\cdot 4)}(z) = 3^{84}\cos(3z)$, por lo que

$$\oint_C \frac{\cos(3z)}{z^{85}}dz = -\frac{2\pi i}{84!}3^{84}\cos(0) =$$

$$= -\frac{2\pi i}{84\cdot(83)!} = -\frac{3^{84}\pi i}{42\cdot(83)!} \Rightarrow \operatorname{Im} I = -\frac{3^{84}\pi}{42\cdot(83)!}$$

Problema 12
Demuestre que $\oint_{|z|=1} \dfrac{e^{3z}\operatorname{sen}(5z)}{z}dz = 0$

Solución
El teorema de Cauchy de la clase 13 no lo podemos aplicar puesto que $f(z) = \dfrac{e^{3z}\operatorname{sen}(5z)}{z}$ no es analítica dentro del círculo $|z| < 1$ (al no serlo en $z = 0$).

Pensemos en el teorema 1 de la clase 14, fórmula integral de Cauchy, con $\dfrac{f(z)}{z-0} = \dfrac{e^{3z}\operatorname{sen}(5z)}{z-0}$, verifique las condiciones y se tendrá

$$\oint_C \frac{e^{3z}\operatorname{sen}(5z)}{z-0}dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i e^0 \operatorname{sen}(0) = 0.$$

Problema 13
Demuestre que $\oint_C \dfrac{e^z + z\operatorname{sen}(z)}{z-\pi i}dz = 2\pi i[1 + \pi\operatorname{senh}(\pi)]$, donde C es la circunferencia centrada en el origen de radio 10^{-6}. Justifique todos sus pasos

Solución
Utilice el mismo procedimiento del ejercicio (12).

Problema 14
Demuestre que $\oint_{\sigma(t)=2\pi i+10^{-5}e^{it}} \dfrac{e^{-z}+z\cos(z)}{(z-2\pi i)^2}dz = 2\pi i[-1+\cosh(2\pi)+2\pi\,\mathrm{senh}\,(2\pi)]$. Explique la teoría necesaria y justifique todos sus pasos

Solución
Utilice el mismo procedimiento del ejercicio (12).

Problema 15
Calcular $\displaystyle\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z+1)Log(z+3)}$, con sentido de C positivo.

Solución
Dominio de analiticidad de $Log(z+3) = \mathbb{C}\setminus\{x+iy : y=0,\ x\leq -3\}$. Luego en $|z| = \dfrac{3}{2},\ Log(z+3)$ es analítica

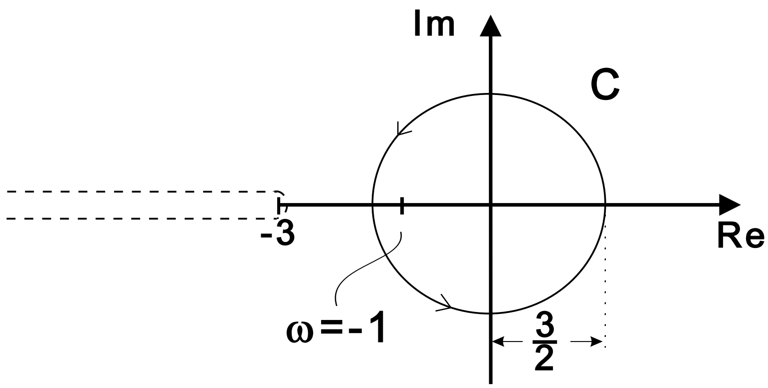


Figura 14.6:

y distinta de cero, lo que implica que $\dfrac{1}{Log(z+3)}$ es analítica en $|z| = \dfrac{3}{2}$ por ser cociente de funciones analíticas.

Podemos escribir entonces la integral dada como: $\displaystyle\int_C \frac{\frac{1}{Log(z+3)}}{z-(-1)}dz$ Ahora el lector debe completar los requisitos necesarios para aplicar la fórmula de Cauchy, llegando así:

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z+1)Log(z+3)} = \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\frac{1}{Log(z+3)}}{z-(-1)}dz =$$

$$= 2\pi i\frac{1}{Log(-1+3)} = \frac{2\pi i}{Log2} = \frac{2\pi i}{\ln 2}$$

ya que $Log2 = \ln 2 + i(0+2k\pi)$ con k tal que $2k\pi \in (-\pi,\pi) \Leftrightarrow k=0$.

Problema 16
Demostrar que $\displaystyle\oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i & \text{si} \quad n=0 \\ 0 & \text{si} \quad n=1,2,3,\ldots \end{cases}$.

Solución

Si $n = 0,\ I = \oint_C \frac{dz}{z - z_0}$, con C circunferencia de centro z_0 y radio r donde, $f(z) = 1$ es entera, aplique la fórmula integral de Cauchy (complete las condiciones del teorema).

Si $n > 1,\ I = \oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$.

(Complete las condiciones del teorema de la fórmula integral de Cauchy para derivadas)
y como $f(z) = 1,\ f^{(n)}(z_0) = 0$ y se concluye el resultado.

Problema 17

Demostrar que $\oint_{|z-i|=1} \frac{e^z}{(z - i)\cos z} dz - \frac{2\pi}{\cosh(1)}[\operatorname{sen}(1) - \cos(1)] = 0$, con $|z - i| = 1$ en sentido negativo.

Solución

Poner $\frac{e^z}{(z - i)\cos z} = \frac{\frac{e^z}{\cos z}}{z - i}$. $f(z) = \frac{e^z}{\cos z}$ es entera $w = i$. Verifique condiciones de la fórmula integral de Cauchy

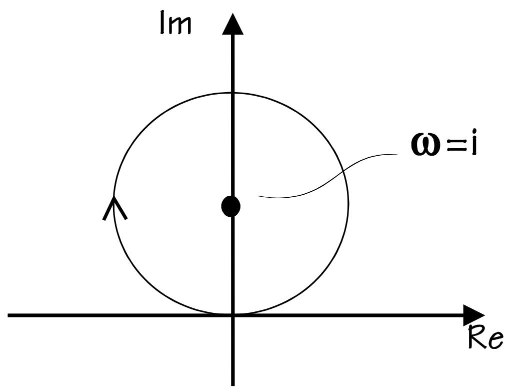


Figura 14.7:

para concluir que la integral vale $\frac{2\pi}{\cosh(1)}[\operatorname{sen}(1) - \cos(1)]$ de allí se sigue el resultado.

Problema 18

Calcular $\oint_C \frac{\tan(\frac{z}{2})}{(z - \frac{\pi}{3})^2} dz$, donde C es el borde del cuadrado $[-2, 2] \times [-2, 2]$ en sentido positivo.

Solución

Los puntos donde $f(z) = \tan\left(\frac{z}{2}\right)$ no es analítica son $\frac{z}{2} = (2n - 1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z = (2n - 1)\pi$, los cuales no pertenecen al cuadrado. Verifique que se cumplen las condiciones de la fórmula integral de Cauchy para las derivadas con $n + 1 = 2 \Rightarrow n = 1$ de donde,

$$I = \frac{2\pi i}{1!}\left(\tan\left(\frac{z}{2}\right)\right)'_{z=\frac{\pi}{3}} = 2\pi i\left[\sec^2\left(\frac{z}{2}\right)\right]\frac{1}{2} =$$

$$= \pi i \sec^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi i}{\cos^2(\frac{\pi}{6})} = \frac{4\pi i}{3}.$$

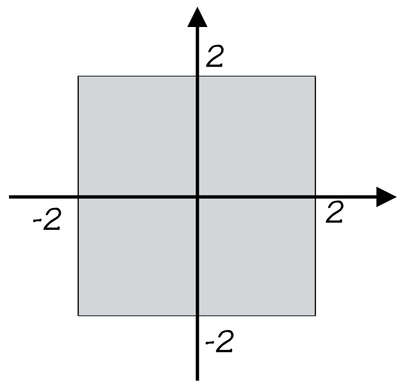


Figura 14.8:

Problema 19

Marque la respuesta correcta en la tabla anexa para $\displaystyle\oint_{\substack{\sigma(t)\,=\,2\pi\cos t + 2\pi i \operatorname{sen} t \\ t\in[0,2\pi]}} \frac{ze^z}{(z+\pi i)^{n+1}}\,dz$

(a). $(e^{\pi i}+1)\dfrac{2\pi i}{n!}$ (b). $(n\pi i-1)\dfrac{2\pi i}{n!}$ (c). $(\pi i-n)\dfrac{2\pi i}{n!}$ (d). 0 (e). $-(\pi i+n)\frac{\pi}{n!}$

Solución

Utilice la fórmula integral de Cauchy para las derivadas. Ponga $f(z)=ze^z,\ w=-\pi i$, dibuje C y verifique que las condiciones del teorema se cumplen para llegar a la solución (c).

Problema 20

Calcular $I=\displaystyle\oint_{|z-1-i|=\frac{5}{4}} \frac{Logz}{(z^2+1)(z^2-2z+1)}dz.$

Solución

Dibuje C, además $(z^2+1)(z^2-2z+1)=(z^2+1)(z-1)^2=0,\ z_1=i,\ z_2=-i,\ z_3=1;\ \{z_1,z_3\}\subset$Int$C;\ -i\notin(C\cup$Int$C$.

Describir $C_1(i,\epsilon_1),\ C_2(1,\epsilon_2)$ con $\epsilon_1,\ \epsilon_2$ adecuados para aplicar el teorema de deformación y llegar a:

$$\oint_C f(z)dz=\oint_{C_1} f(z)dz+\oint_{C_2} f(z)dz$$

si decimos que $f_1(z)=\dfrac{Logz}{(z+i)(z-1)^2}$ y $f_2(z)=\frac{Logz}{z^2+1}$ entonces,

$$\oint_C f(z)dz=\int_{C_1}\frac{f_1(z)}{z-i}dz+\int_{C_2}\frac{f_2(z)}{(z-1)^2}dz$$

Ahora se aplica la fórmula integral de Cauchy (justifique) y llegue a

$$I=2\pi i f_1(i)+\frac{2\pi i}{1!}f_2'(1)=2\pi i\frac{Logi}{2i(i-1)^2}+\frac{2\pi i}{2}=$$

$$=\pi\frac{i\frac{\pi}{2}}{(i-1)^2}+\pi i=\frac{\pi^2 i}{2(i-1)^2}+\pi i$$

Problema 21
Los ejercicios a continuación serán de mucha utilidad para más adelante.

(a). *Desigualdad* Ml

Sea C una curva dada, de longitud l y sea $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua. Suponer que $C \subset A$ y que existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M, \; \forall\, z \in \mathbb{C}$. Demuestre que $\left| \int_C f(z)dz \right| \leq Ml$.

(b). Si $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica en A y f' continua en A, entonces se demuestra que f' también es analítica en A, así como también lo son $f'', \; f''', \ldots, f^{(n)}, \ldots$ (Esta propiedad no es cierta en $\mathbb{R}$).

(c). *Desigualdad de Cauchy*

Si f es analítica es un abierto A que contiene al círculo $D = \{z : |z - z_0| < r\}$ y si $|f(z)| < M, \; \forall\, z$ en la circunferencia $C = \{z : |z - z_0| = r\}$, entonces $|f^{(k)}(z_0)| \leq \dfrac{k!}{r^k} M; \; k = 0, 1, 2, \ldots$

(d). *Teorema de Liouville*

Si f es entera (analítica en todo $\mathbb{C}$) y acotada (o sea que existe um $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M, \; \forall\, z$) Entonces f es constante.

Solución

(a). *Desigualdad* Ml Recordemos que f continua en A quiere decir que existe

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)dt,$$

siendo C una curva descrita en A por la función $\sigma : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Ahora,

$$\left| \int_C f(z)dz \right| = \left| \int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)dt \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f(\sigma(t))||\sigma'(t)|dt \leq M \int_a^b |\sigma'(t)|dt = Ml,$$

puesto que $l(C)_a^b = \displaystyle\int_a^b |\sigma'(t)|dt$.

(b). La demostración de esta parte (b) es una consecuencia de las fórmulas de Cauchy y se deja como ejercicio.

(c). *Desigualdad de Cauchy* Aplicando la fórmula de Cauchy para las derivadas (clase 14 teorema 2) sobre D:

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \Rightarrow$$

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \oint_C \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{k+1}} dz$$

pero $|f(z)| < M, \; \forall\, z$ en $C = \{z : |z - z_0| = r\}$ por lo que

$$\frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{k+1}} \leq \frac{M}{r^{k+1}} \Rightarrow |f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{2\pi} \oint_C \frac{M}{r^{k+1}} dz$$

Ahora, $\displaystyle\oint_A \frac{M}{r^{k+1}} dz = \frac{M}{r^{k+1}} \oint_C dz = \frac{M}{r^{k+1}} \; long(C) = \frac{M}{r^{k+1} 2\pi r}$

por lo que $|f^{(k)}(z_0)| \leq \dfrac{k!}{r^k} M, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots,$ como queríamos.

(d). *Teorema de Liouville* Al ser f entera y acotada, podemos aplicar la desigualdad de Cauchy:

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} M, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots,$$

con $D = \{z : |z - z_0| < r\} \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Ahora con $k = 1, \; |f^{(1)}(z_0)| \leq \dfrac{M}{r}$ cualquiera que sea r, por lo tanto, tomando r suficientemente grande, $\dfrac{M}{r} \to 0$ y así $f^{(1)}(z_0) = 0, \; \forall\, z \in \mathbb{C} \Rightarrow f$ es función constante.

Capítulo 15

Series Complejas

Objetivos: En este capítulo es imprescindible, que el alumno haga el repaso aconsejado sobre series reales, para así poder entender mejor las series complejas. Debe manejar con soltura las series de e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, $\operatorname{sen} hz$, $\cos hz$ y la importantisima serie geométrica (de mucha utilidad en los ejercicios). Así mismo, debe madurar las ideas de derivación e integración de series de potencias, convergentes.

Las definiciones de sucesión, serie, etc son análogas a las del caso real. Vamos a presentar formalmente los criterios de convergencia de series.

Definición 4 *[Sucesión convergente de números complejos] Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es convergente y su límite es $l \in \mathbb{C}$, si dado $\varepsilon > 0$ (real) tan pequeño como queramos, existe un $N > 0$, $N \in \mathbb{N}$ función de ε, tal que $|z_m - l| < \varepsilon$ para cualquier $m > N$. En tal caso, denotamos: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = l$*

La definición 4 debe interpretarse de la manera siguiente: Si $\{z_n\}$ converge a l, entonces a partir de un cierto valor N, los términos de la sucesión están dentro del círculo dado por $\{z_k|\ |z_k - l| < \varepsilon\}$, $k = m, m+1, \cdots$

En el caso real, significa que con $m > N$, los términos x_m están en $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ y $l \in \mathbb{R}$

Definición 5 *Una serie infinita de números complejos $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k$ converge a $S \in \mathbb{C}$, si la sucesión de las sumas parciales de la serie dada, esto es $\{S_1, S_2, \ldots, S_p, \ldots\} = \left\{\sum\limits_{k=0}^{1} z_k, \sum\limits_{k=0}^{2} z_k, \ldots, \sum\limits_{k=0}^{p} z_k, \ldots\right\}$, converge a S*

Escribimos entonces $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k \longrightarrow S$ si $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} z_k \to S$. En este caso, es costumbre identificar la serie con su suma y poner $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k = S$ en lugar de $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k \to S$ (sólo cuando la serie converja).

En adelante, abreviaremos convergente con (C).

Definición 6 (Serie Absolutamente Convergente) *La serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k$ es absolutamente convergente (notación: (Abs. C)) si es convergente la serie de los módulos de los z_k, es decir: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k$ es (Abs. C) si $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |z_k|$ es convergente.*

Así, para saber si una serie es (Abs. C), es necesario determinar si la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |z_k|$ es (C).

Teorema 12 *Si la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k$ es (Abs. C) $\Longrightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k$ es (C) (o sea que si $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |z_k|$ es (C) $\Longrightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k$ es (C)).*

El recíproco, no es cierto; una serie $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ puede ser (C) y no serlo $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$

Es importante recordar entonces la cadena siguiente:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} |z_k| \text{ es (C)} \overset{\text{Def. 6}}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ es (Abs. C)} \overset{\text{Teor. 12}}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ es (C)}}$$

Para aclarar más las ideas, escribiendo la parte real e imaginaria de cada z_k, queda: $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k + iy_k|$ es (C) $\Longrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} (x_k + iy_k)$ es (C). Y, para abreviar, recordemos de series reales una propiedad que aplicaremos aquí: Reordenando la sucesión $\{x_k + iy_k\}$ (significa reordenar las sucesiones $\{x_k\}$ y $\{y_k\}$ $\Longrightarrow$ Los teoremas de reordenamiento de términos en series (Abs. C) son válidos también para series de términos complejos.

Algunos criterios de convergencia, estudiados en matemáticas anteriores, para series de números reales son también aplicados en algunos casos a series complejas. Veamos las versiones correspondientes.

Criterio 1 (Comparación con la mayorante convergente) *Si se tiene una serie de números reales positivos* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *y una de complejos* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \ a_k \in \mathbb{C}$ *con* $|a_k| \leq b_k$ *(o sea que la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *es una serie mayorante de la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$*) entonces la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *(C)* $\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *es (Abs. C) y, por el teorema 12,* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *es (C).*

En símbolos:

$$\textit{Si } |a_k| \leq b_k \textit{ y } \sum_{k=0}^{\infty} b_k \textit{ (C)} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \textit{ (Abs. C)} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \textit{ (C)}$$

Criterio 2 (Criterio del cociente (D′Alembert)) *Si se tiene una serie compleja* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *y* $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ *converge a* L *(real)* $< 1 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *es (Abs. C) (y, por teorema 12,* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *(Abs. C)* $\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *(C)).*

Además, si $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ *converge a* L *(real)* $> 1 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *es divergente (Notación: (D)).*

Finalmente, si $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ *converge a* $L = 1$*, estamos en presencia de un caso dudoso (lo veremos en los ejercicios).*

Criterio 3 (Criterio de la raiz (Cauchy)) *Si se tiene una serie compleja* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *y* $\sqrt[k]{|a_k|}$ *converge a* $L < 1 \Longrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *es (Abs. C)* $\overset{\text{Teor. 12}}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *es (C); si* $\sqrt[k]{|a_k|}$ *converge a* $L > 1 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *es (D); y si* $\sqrt[k]{|a_k|}$ *converge a* $L = 1 \Longrightarrow$ *Caso dudoso (lo veremos en los ejercicios).*

Teorema 13 (Condición necesaria de convergencia) *Dada la serie compleja* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$*, es condición necesaria para la convergencia de* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$*, que* $|a_k| \longrightarrow 0$*. Es decir, si* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *(C)* $\Longrightarrow |a_k| \longrightarrow 0$

Observación 5 *La condición es necesaria pero no suficiente, puesto que la sucesión* $a_k = \frac{1}{k} + 0i \in \mathbb{C}$ *satisface* $\lim_{k\to\infty} |a_k| = \lim_{k\to\infty} |\frac{1}{k} + 0i| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ *y, de matemáticas anteriores se sabe que* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ *(la serie armónica) diverge*

Definición 7 (Serie de funciones complejas) *Sea* $\{f_0,\, f_1,\, f_2, \dots,\, f_n, \dots\}$ *una sucesión de funciones con* $f_i\,:\,A$ *(abierto)* $\subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

Para cualquier $z \in A$*, la serie* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ *es una serie de funciones complejas (la cual podría ser convergente o no).*

Definición 8 (Dominio de convergencia) *Se llama dominio de convergencia de la serie de funciones complejas* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ *al conjunto* $\{z \in \mathbb{C} \mid \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ *es una serie convergente* $\}$ $=$*Dom. Conv. de la serie.*

Ahora bien, análogo al caso real si $z \in$ Dom. Conv. de $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$, podemos definir una nueva función $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ en dicho Dom. de (C).

(Recuérdese el caso real: una vez demostrado que la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$, se define entonces $f(x) = e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Aquí Dom. de Conv. de la serie es $(-\infty, \infty)$)

Las series de funciones complejas que usaremos más frecuentemente serán series de potencias: series de la forma $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ con a_k, z_0 constantes en $\mathbb{C}$ y z variable en $\mathbb{C}$

Teorema 14 (La Serie Geométrica) *La serie geométrica* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ *(aquí* $a_k = 1 + 0i = 1,\ k = 0, 1, 2, \dots)$ *converge a* $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ *para todo* z *en el interior del círculo unitario* $\{z \mid |z| < 1\}$ *y diverge para todo* z *fuera de allí. Este teorema lo demostraremos entre los ejercicios.*

Obsérvese que, al igual que en el caso real, la serie se llama geométrica porque cada sumando, a partir del segundo, se obtiene multiplicando el anterior por un complejo fijo que, en este caso es z. Así, $z^0 = 1$, $z^1 = 1 * z$, $z^2 = z^1 * z$, $z^3 = z^2 * z$, etc.

Teorema 15 *El dominio de convergencia de una serie* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ *es uno de los siguientes:*

(a) El punto z_0 *solamente ó*

(b) Todo $\mathbb{C}$ *ó*

(c) $\{z \mid |z - z_0| < r\} =$ *Círculo de centro* z_0 *y radio* r *(para algún* $r \in \mathbb{R}$*) ó*

(d) $\{z \mid |z - z_0| \leq r\} =$ *Disco de centro* z_0 *y radio* r *(para algún* $r \in \mathbb{R}$*)*

Definición 9 (Radio de Convergencia) *El círculo* $C(z_0; r)$ *(círculo de centro* z_0 *y radio* r*) es el círculo de convergencia de la serie dada y* r *es el radio de convergencia.*

En el caso (a) del teorema 15, $C(z_0; r) = \{z_0\};\ r = 0$ *y en el caso (b),* $C(z_0; r) = \mathbb{C};\ r = \infty$

Teorema 16 (Cálculo del radio de convergencia) *Dada una serie de potencias* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ *convergente:*

(a) si existe $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = l$*, entonces* $r = \dfrac{1}{l}$ *(En algunos textos, se pone* $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = l,\ r = l$*, que es lo mismo).*

(b) si existe $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = l$*, entonces* $r = \dfrac{1}{l}$

Más adelante, entre los ejercicios propondremos demostrar que las series:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$ converge a e^z, siendo $r=\infty$ (Dom. de (C)=$\mathbb{C}$)

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!}$ converge a $\operatorname{sen} z$, $r=\infty$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{z^{2k}}{(2k)!}$ converge a $\cos z$, $r=\infty$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!}$ converge a $\operatorname{senh} z$, $r=\infty$

(e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}$ converge a $\cosh z$, $r=\infty$

En todos estos casos, $z_0=O$

Teorema 17 (Derivación e Integración de series) *Si* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$ *es una serie de potencias convergente, con radio de convergencia* $r\neq 0$*, entonces la función definida por* $f(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$ *es analítica en el círculo de convergencia de la serie (Recordar que* f *analítica* $\Longrightarrow \exists\, f', f'',\ldots,f^{(n)},\ldots$*) y la derivada* $f^{(n)}$ *se obtiene por*

$$f^{(n)}(z)=\frac{d^n f(z)}{dz^n}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{d^{(n)}}{dz^n}[(z-z_0)^k]$$

teniendo esta serie (que se denomina serie derivada), el mismo radio de convergencia que la serie original.

Además, si f *es analítica en el círculo de convergencia de la serie dada, ésta se puede integrar término a término (siempre que la serie dada sea convergente) y el radio de convergencia de esta nueva serie obtenida de integrar la original, será el mismo radio de convergencia de la serie dada.*

Observación 6 *Este teorema no se cumple para series reales.*

Definición 10 (Serie de Taylor) *Sea* $f : A$ *(abierto)* $\subset\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$*. Si existe la serie* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$*, tal serie se denomina la serie de Taylor de* f *alrededor de* z_0 *(Si* $z_0=O$*, la serie se denomina serie de Mc Laurin)*

Teorema 18 *Sea* $f : A$ *(abierto)* $\subset\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ *analítica con* f' *continua en* z_0*. Entonces* f *es desarrollable en serie de Taylor alrededor de* z_0*, siendo la serie convergente en cada* z *perteneciente al mayor círculo* $D(z_0;r)=\{z \mid |z-z_0|<r\}$ *contenido en* A *(Si* $r=\infty$*,* $D(z_0;\infty)=A=\mathbb{C}$*). Así, la serie de Taylor* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$ *converge en* D *y se tiene que* $f(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$

Observación 7 *Como se observa, el teorema 18 tiene enorme importancia práctica. Basta con que una función sea analítica en un conjunto abierto de* $\mathbb{C}$ *para que sea desarrollable en serie de Taylor, siendo la serie convergente y además represente a la función.*

Observación 8 *También se puede demostrar que si* f *es desarrollable en serie de potencias, convergente y* $f(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$*, entonces* f *es analítica en el círculo de convergencia de la serie.*

Se puede concluir entonces que: Una función $f : A$ (abierto) $\subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica en una vecindad $V(z_0) \Longleftrightarrow f$ es desarrollable en serie de Taylor en $V(z_0)$.

El significado de este último resultado es muy importante, basta con que una función compleja sea derivable en una vecindad de un punto para que existan todas las derivadas en el punto y, además, la función sea igual a su serie de Taylor.

Esto último no es cierto para funciones reales: podemos hallar una función (real) infinitamente derivable y que su serie de Taylor no converja al valor de f en ninguna vecindad del punto. Por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Para $x \neq 0$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ es derivable $\forall\, x \in \mathbb{R}$ (por definición de derivada); $f'(x) = \dfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \neq 0$ pero en $x = 0$, $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = \cdots = 0$. Luego, la serie de Mc Laurin es $0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots \longrightarrow 0$ en toda la recta (esto es $\forall\, x \in \mathbb{R}$) y, por lo tanto, no converge a $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \neq 0$.

Sobre la construcción de la Serie de Taylor: f analítica en $V(z_0) \implies f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, con $a_k = \dfrac{1}{k!}\left[f^{(k)}(z)\right]_{z=z_0}$; $k = 0, 1, 2, \ldots$ y el desarrollo es único.

Teorema 19 (Operaciones con series) *Consideremos las series de complejos* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ *y* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} z_k^*$ *convergentes con sumas respectivas* S *y* S^**. Entonces se cumple que:*

(a) *La serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (z_k + z_k^*)$ *converge con suma* $S + S^*$*.*

(b) *La serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (z_k - z_k^*)$ *converge con suma* $S - S^*$*.*

(c) *Si* c *es constante en* $\mathbb{C}$*, la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} c z_k$ *converge con suma* cS*.*

Teorema 20 *Si una serie converge, entonces al insertar paréntesis en algunos de los sumandos, se obtiene una nueva serie convergente con la misma suma de la serie original.*

Teorema 21 *Si una serie es absolutamente convergente, entonces cualquier reordenación de sus sumandos conduce a una nueva serie absolutamente convergente y con la misma suma de la serie de partida.*

Teorema 22 (Producto de Cauchy) *Consideremos dos series de potencias,* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *y* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$*. Si multiplicamos cada término de la primera serie por cada uno de los términos de la segunda y agrupamos los productos de acuerdo a potencias de* z*, obtenemos la serie denominada Producto de Cauchy de las series dadas:* $a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \cdots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0) z^k$*. Podemos afirmar entonces que el producto de Cauchy de dos series de potencias absolutamente convergentes es absolutamente convergente en el menor de los círculos de convergencia de las series dadas. Así, si* $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *converge en* $D_1(O; r_1)$ *y* $g(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ *converge en* $D_2(O; r_2)$ *entonces* $f(z) * g(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *converge en el menor* D_i*, siendo* $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$*.*

En la definición 4 explicamos lo que significa que $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = l$. Ahora presentamos este teorema de gran importancia para los ejercicios.

Teorema 23 *Una sucesión* $\{z_n\}$ *de complejos* $z_n = x_n + i y_n$*,* $n = 1, 2, \ldots$ *converge a* $l \in \mathbb{C}$*,* $l = l_1 + i l_2 \Longleftrightarrow$ *la sucesión de las partes reales,* $\{x_n\}$*, converge a* l_1 *y la sucesión de las partes imaginarias,* $\{y_n\}$*, converge a* l_2*.*

15.1 Ejercicios Resueltos

Problema 1
Dada la sucesión $\{z_k\},\ k=1,2,\ldots$, con $z_k=\dfrac{2k+1}{k}+i\dfrac{k+3}{k},\ k=1,2,\ldots$, demuestre que es convergente utilizando la definición 4, con $\varepsilon=10^{-6}$

Solución
Primero, vamos a identificar algunos términos de la sucesión dada: $z_1=3+4i,\ z_2=\dfrac{5}{2}+\dfrac{5}{2}i,\ z_3=\dfrac{7}{3}+2i,\ z_4=\dfrac{9}{4}+\dfrac{7}{4}i,\ z_5=\dfrac{11}{5}+\dfrac{8}{5}i,\cdots$

No sabemos a priori cual es el posible límite; sin embargo, pareciera que la parte real del mismo es aproximadamente 2 y la parte imaginaria aproximadamente 1, pero esto sería "inducción mal empleada". Por tal motivo, acudiremos al teorema 23, según el cual si el límite existe debe ser $l=\left(\lim\limits_{k\to\infty}x_k\right)+i\left(\lim\limits_{k\to\infty}y_k\right)=2+i$.

Demostremos entonces que $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=l=2+i$ mediante la definición 4:

Queremos probar que, escogido un ε (real) >0 tan pequeño como se quiera, existe N (real) (función de ε) >0 tal que a partir de cierto valor del subíndice, m, $m>N$, se tiene que $|z_m-l|<\varepsilon$.

Ahora bien, $|z_m-l|=\left|\dfrac{2m+1}{m}+i\dfrac{m+3}{m}-2-i\right|=\left|\dfrac{1}{m}+\dfrac{3}{m}i\right|=\dfrac{\sqrt{10}}{m}$ y $\dfrac{\sqrt{10}}{m}<\varepsilon\iff m>\dfrac{\sqrt{10}}{\varepsilon}\iff m>\dfrac{3.16227766}{\varepsilon}=\dfrac{3.16227766}{10^{-6}}=3162277.66$

Por tanto, si $\varepsilon=10^{-6}$ y $m=3162278$, entonces $|z_m-(2+i)|<\varepsilon$

Problema 2
Demuestre que si una sucesión $\{z_k\}=\{x_k+iy_k\}$ es convergente entonces su límite es único.

Solución
Si $\{z_k\}$ es convergente a, digamos $l=l_1+il_2$, el teorema 23 nos afirma que $\{x_k\}$ converge a l_1 y $\{y_k\}$ converge a l_2 pero como $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=l_1$ es único (propiedad de unicidad del límite para sucesiones reales) y (por la misma razón) $\lim\limits_{k\to\infty}y_k=l_2$ también es único entonces se tiene que $l=l_1+il_2$ es único

Problema 3
Estudiar el carácter de la serie[1] $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4+3i)^n}{n!}$

Solución
Vamos a utilizar el criterio del cociente: $|z_n|=\dfrac{5^n}{n!}$, $|z_{n+1}|=\dfrac{5^{n+1}}{(n+1)!}$, $\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\dfrac{5}{n+1}$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n+1}=0<1\Longrightarrow$ la serie dada es Abs. (C) y por el teorema 12: Serie Abs. (C) $\Longrightarrow$ serie convergente.

Obsérvese que con el criterio de la raiz: $|z_n|=\dfrac{5^n}{n!}$, $\sqrt[n]{|z_n|}=\dfrac{5}{\sqrt[n]{n!}}$. Aquí es más difícil estudiar $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}$; sin embargo, vamos a introducir un recurso útil para algunos ejercicios:
FACTORIAL DE STIRLING PARA INFINITOS EQUIVALENTES:

Cuando en alguna expresión en donde $n\longrightarrow\infty$ aparezca $n!$ como factor, se puede reemplazar por $n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}$, es decir, $n!\overset{\substack{\text{infinito equivalente}\\ \downarrow}}{\approx}n^ne^{-n}(2\pi)^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}$

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{\sqrt[n]{n!}}=5\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n^ne^{-n}(2\pi)^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{n}}}=5\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{ne^{-1}(2\pi)^{\frac{1}{2n}}n^{\frac{1}{2n}}}=0<1\Longrightarrow$ Serie Abs. (C) $\Longrightarrow$ Serie (C), ya que $(2\pi)^{\frac{1}{2n}}\longrightarrow1$ y $n^{\frac{1}{2n}}\longrightarrow1$.

Problema 4
Estudiar el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$, $z\in\mathbb{C}$

Solución
Si aplicamos el criterio del cociente:

$$\left|\frac{z^{k+1}/(k+1)!}{z^k/k!}\right|=|z|\frac{k!}{(k+1)!}=|z|\frac{k!}{(k+1)*(k!)}=\frac{|z|}{k+1}\text{ y }\lim_{k\to\infty}\frac{|z|}{k+1}=0<1.$$

[1]Estudiar el carácter de una serie significa determinar si la serie dada es (C) o (D)

Por lo tanto, la serie es Abs. (C) y, por teorema 12, la serie es (C).

Se deja al alumno la aplicación del criterio de la raiz. El camino será más largo y tendrá que aplicar el factorial de Stirling.

Problema 5

Demostrar que la serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$:

(a) converge a $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ para todo z en el interior del círculo unitario $C(O;1) = \{z \mid |z| < 1\}$

(b) diverge fuera de $C(O;1)$, es decir, para $|z| > 1$ y para $|z| = 1$

Solución

Empecemos con (a). Criterio del cociente: $\left|\dfrac{z^{k+1}}{z^k}\right| = |z|$, luego $\lim_{k\to\infty} |z| = |z| \Longrightarrow$ serie Abs. (C) si $|z| < 1$ y, por teorema 12 serie (C) si $|z| < 1$. Al mismo tiempo, tenemos demostrado (b), puesto que si $|z| > 1$ entonces, por el criterio del cociente se deduce que la serie (D).

Resta probar que con $|z| < 1$, la serie converge precisamente a $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$.

En efecto, sea $S_{m+1}(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^m$. Ahora, recordando que $\dfrac{a^{m+1} - b^{m+1}}{a-b} = a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + \cdots + b^m$, tenemos que $S_{m+1}(z) = \dfrac{1^{m+1} - z^{m+1}}{1-z}$, de donde $\lim_{m\to\infty} S_{m+1}(z) = \dfrac{1}{1-z} - \dfrac{1}{1-z}\lim_{m\to\infty} z^{m+1} = \dfrac{1}{1-z}$ puesto que $z^{m+1} = \rho^{m+1}\operatorname{cis}[(\mathrm{m}+1)\theta]$ y como $\cos$ y sen son funciones acotadas, entonces se tiene que $\lim_{m\to\infty} z^{m+1} = \left(\lim_{m\to\infty}\rho^{m+1}\right)\lim_{m\to\infty}(\text{acotado} + i\,\text{acotado}) = \begin{cases} \infty & \text{si } \lim_{m\to\infty}\rho^{m+1} = \infty\text{, es decir, si } |z| = \rho > 1 \\ 0 & \text{en el caso } |z| = \rho < 1 \end{cases}$

En el segundo, resulta $\lim_{m\to\infty} S_{m+1}(z) = \dfrac{1}{1-z}$

Resta el caso $|z| = 1$. Si $|z| = 1$, entonces $|z^n| = 1\ \forall n$, luego el término general de la serie de los valores absolutos no tiende a cero y por tanto la serie diverge (Contra-recíproco del teorema 13).

CONCLUSION: La serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots$

(a) converge a $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ para todo z con $|z| < 1$

(b) diverge para todo z con $|z| \geq 1$

Problema 6

En el ejercicio 4 se demostró que la serie $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{k!}$ es convergente $\forall z \in \mathbb{C}$. Demuestre que si $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{k!}$ entonces existe $f'(z)$ y es igual a $f(z)$

Solución

Por el ejercicio 4 y el teorema 17, se cumple que existe $f'(z)$ convergente $\forall z \in \mathbb{C}$ y como $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{k!} = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots + \dfrac{z^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots$ entonces $f'(z) = 0 + 1 + \dfrac{2z}{2} + \dfrac{3z^2}{6} + \cdots + \dfrac{(n+1)z^n}{(n+1)!} + \cdots = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots + \dfrac{z^n}{n!} = f(z)$.

Más adelante veremos que $f(z) = e^z = f'(z) = f''(z) = \cdots = f^{(n)}(z)$

Problema 7

Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} k^n (z-2)^n$, $k \in \mathbb{C}\backslash\{O\}$ (fijo) es convergente y halle su dominio y radio de convergencia

Solución

$\left|\dfrac{k^{n+1}(z-2)^{n+1}}{k^n(z-2)^n}\right| = |k||z-2|;\quad \lim_{n\to\infty}|k||z-2| = |k||z-2|$ y, por el criterio del cociente, la serie dada es convergente si $|k||z-2|<1$, es decir, si $|z-2|<1/|k|$. Luego, la serie es convergente en el círculo $\left\{z \;\Big/\; |z-2|<\dfrac{1}{|k|}\right\}$ y el radio de convergencia es precisamente $\dfrac{1}{|k|}$

Observación 9 *Si nos aseguran que la serie es (C) y sólo queremos conocer el radio de (C), utilizamos sólo la definición 16:* $r=1/l$ *con* $l=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{k^{n+1}}{k^n}\right|=|k|\Longrightarrow r=\dfrac{1}{|k|}$

Problema 8

Sabemos, de capítulos anteriores, que son analíticas en todo $\mathbb{C}$ (es decir, son enteras) las funciones definidas por $f_1(z)=e^z$, $f_2(z)=\operatorname{sen} z$, $f_3(z)=\cos z$, $f_4(z)=\operatorname{senh} z$, $f_5(z)=\cosh z$. Además, es trivial demostrar, utilizando las definiciones respectivas (como funciones de exponenciales) que las correspondientes derivadas, $f'_k(z)$ son continuas $\forall z\in\mathbb{C}$

Halle entonces los desarrollos en serie de Taylor de los $f_k(z)$ alrededor de $z_0=O$ y demuestre que tales desarrollos son convergentes. Halle dominio y radio de convergencia en cada caso.

Solución

(a) $f_1(z)=e^z$, $f_1'(z)=e^z,\dots,f_1^{(n)}(z)=e^z,\dots$ Luego, $f_1(O)=f_1'(O)=\cdots=f_1^{(n)}(O)=\cdots=1$. Así, la serie de Taylor es $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_1^{(k)}(O)}{k!}(z-O)^k=\frac{f_1^{(0)}(O)}{0!}z^0+\frac{f_1^{(1)}(O)}{1!}z+\frac{f_1^{(2)}(O)}{2!}z^2+\cdots=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$ y, por el teorema 18, $f_1(z)=e^z=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$ es convergente.

Vamos a hallar círculo y radio de convergencia: $\left|\dfrac{1/(k+1)!}{1/k!}\right|=\left|\dfrac{k!}{(k+1)!}\right|=\left|\dfrac{1}{k+1}\right|$, $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{1}{k+1}\right|=0=l\Longrightarrow$ radio de convergencia ="$1/0$"$=\infty\Longrightarrow$ Dom. de Conv. $=\mathbb{C}$

De manera análoga puede ud. demostrar que

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots=\operatorname{sen} z$ con $r=\infty$ y Dom. de (C)$=\mathbb{C}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{z^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots=\cos z$, $r=\infty$ y Dom. de (C)$=\mathbb{C}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!}=\operatorname{senh} z$, $r=\infty$ y Dom. (C)$=\mathbb{C}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}=\cosh z$, $r=\infty$ y Dom. (C)$=\mathbb{C}$

Problema 9

Hallar desarrollo en serie de Taylor en vecindad de $z_0=O$ para $f(z)=\operatorname{Log}(1+z)$. Dar radio y dominio de (C)

Solución

Sabemos que f es analítica en $\mathbb{C}\backslash\{u+iv\mid v=0,\ u\le 0\}\Longrightarrow D=\mathbb{C}\backslash\{z=(x+1)+iy\mid y=0,\ x\le -1\}$

Luego, f es desarrollable en serie de Taylor en $V(O)$ si $V(O)$ está en el mayor disco donde la serie converge:

D_1 es el mayor disco $\subset D$ en donde la serie converge y $V(O)=D_1=\{z\mid |z-O|<1\}$ $\quad f(O)=\operatorname{Log}1=0$

$f'(z)=\dfrac{1}{z+1}$, $f'(O)=1$

$f''(z)=-\dfrac{1}{(z+1)^2}$, $f''(O)=-1$

$f^{(3)}(z)=\dfrac{2}{(z+1)^3}$, $f^{(3)}(O)=2!$

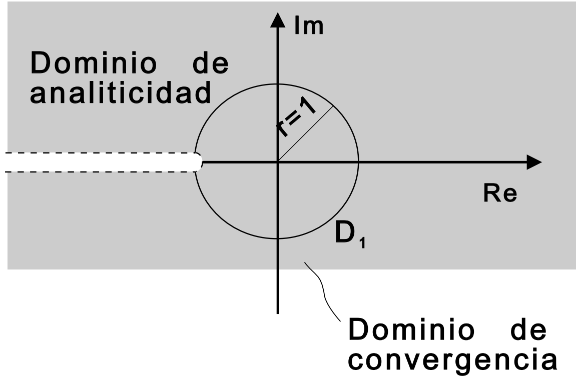


Figura 15.1:

Por inducción sobre n se demuestra que $f^{(n)}(z) = \dfrac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{(z+1)^n}$, de donde $f^{(n)}(O) = (n-1)!(-1)^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$

Así, $\mathrm{Log}\,(1+z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(O)}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \cdots$

Es obvio que el radio de (C) es $r = 1$ y el dominio de (C) es $C(O;1)\backslash\{x = -1\}$. Ver figura 15.1

Problema 10

Demuestre que:

(a) $\mathrm{Log}\,(1-z) = -z - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 - \cdots$

(b) $\mathrm{Log}\,\dfrac{1+z}{1-z} = \mathrm{Log}\,(1+z) - \mathrm{Log}\,(1-z) = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k-1}}{2k-1} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}$, $|z| < 1$

Problema 11

Hallar el desarrollo en serie de Mc Laurin (Taylor con $z_0 = O$) de $f(z) = \dfrac{e^z}{1+z}$

Solución

Es obvio que el desarrollo existe puesto que $g(z) = e^z$ y $h(z) = 1 + z$ son funciones elementales y, por tanto, f es analítica en $\mathbb{C}\backslash\{z \mid z = -1\}$ (lo que incluye a $z_0 = O$). El presente ejercicio nos servirá para mostrarnos que, a veces, no es necesario el cálculo de las derivadas para usar la fórmula de Mc Laurin. En efecto, $\dfrac{e^z}{1+z} = e^z \dfrac{1}{1-(-z)} = \left(1 + \dfrac{z}{1!} + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots + \dfrac{z^n}{n!} + \cdots\right)\left(1 - z + z^2 - z^3 + \cdots + (-1)^n z^n + \cdots\right)$ puesto que $\dfrac{1}{1-(-z)}$ representa a una "serie geométrica" convergente si $|-z| = |z| < 1$.

Ahora, utilizamos el teorema 22 (Producto de Cauchy) con $a_0 = 1$, $a_1 = 1/1!$, $a_2 = 1/2!$, $a_3 = 1/3!$, ..., $a_n = 1/n!$, ... y $b_0 = 1$, $b_1 = -1$, $b_2 = 1$, $b_3 = -1$, ..., $b_n = (-1)^n$,...

Luego, $\dfrac{e^z}{1+z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ con $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0 b_0 = 1 * 1 = 1 \\
c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1 * (-1) + \frac{1}{1!} * 1 = 0 \\
c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 1 * 1 + 1 * (-1) + \frac{1}{2} * 1 = \frac{1}{2} \\
c_3 &= -\frac{1}{3} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Así, $e^z \dfrac{1}{1+z} = 1 + \dfrac{1}{2}z^2 - \dfrac{1}{3}z^3 + \cdots$ convergente en $|z| < 1$

Problema 12

Demuestre que $\dfrac{e^z}{1-z} = 1 + 2z + \dfrac{5z^2}{2} + \dfrac{8z^3}{3} + \cdots$ es convergente en $|z| < 1$.

Problema 13

(a) Hallar la serie de Taylor de $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ alrededor de $z_0 = -1$ sin utilizar el teorema 18

(b) Dibujar el disco de convergencia,

(c) Estudiar la convergencia en un punto del borde (a su elección)

Solución

(a) Primero, obsérvese que

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2-1-z} = \frac{1}{2-(1+z)} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1+z}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1+z}{2}}$$

Ahora, $\dfrac{1}{1-\frac{1+z}{2}}$ es una serie geométrica convergente si $|\frac{1+z}{2}| < 1 \iff -1 < \frac{1+z}{2} < 1 \iff -2 < 1+z < 2$ (esto no sabemos si es cierto en nuestro caso) pero $\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$ converge si $|z| < 1 \iff -1 < z < 1 \iff 0 < 1+z < 2$. Luego, $-2 < 1+z < 2$ es cierto $\Longrightarrow$ Círculo de centro -1 y radio 2.

Por lo tanto, tenemos que

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1+z}{2} + \frac{(z+1)^2}{2^2} + \cdots\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$$

(b) $\{z \;/\; |z-(-1)| = |z+1| < 2\}$

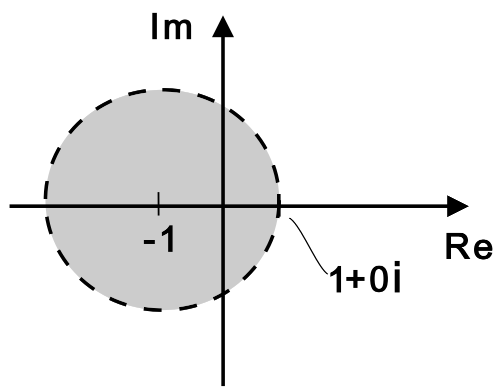


Figura 15.2:

(c) Por ejemplo, si elegimos $z = 1 + 0i = 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(1+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}$, luego, el término general de la serie, $T_n = 1/2$ no tiende a cero y, por tanto, la serie dada diverge.

(En general, para $z = x + iy$ en el borde del disco, $z + 1 = (x+1) + iy$, $|z+1|^2 = (x+1)^2 + y^2 = 4$, $|T_n| = \dfrac{1}{2^{n+1}}(\sqrt{(x+1)^2+y^2})^n = \dfrac{\sqrt{4^n}}{2^{n+1}} = \dfrac{(2^{2n})^{1/2}}{2^{n+1}} = \dfrac{2^n}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2} \not\to 0$)

Problema 14
Hallar serie de Taylor de $f(z) = \dfrac{z}{z-1}$ alrededor de $z_0 = i$. Hallar dominio y radio de convergencia sin utilizar el teorema 18.

Solución

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{z-1} = \frac{z-i+i}{z-i+i-1} = \frac{i+(z-i)}{i-1+(z-i)} = \frac{1}{i-1}\frac{i+(z-i)}{1+\frac{z-i}{i-1}} \\ &= -\frac{1+i}{2}[i+(z-i)]\frac{1}{1-\frac{1+i}{2}(z-i)} \end{aligned} \tag{15.1}$$

Veamos si la serie geométrica $\dfrac{1}{1-\frac{1+i}{2}(z-i)}$ converge. Esto sucederá si y solamente si

$$\left|\frac{1+i}{2}(z-i)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z-i| < 1 \Longleftrightarrow |z-i| < \sqrt{2} \tag{15.2}$$

Luego, por (15.1),

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1+i}{2}[i+(z-i)]\left[1+(z-i)\frac{1+i}{2}+(z-i)^2\left(\frac{1+i}{2}\right)^2+(z-i)^3\left(\frac{1+i}{2}\right)^3+\cdots\right] \\ &= -\frac{1+i}{2}\left[i+(z-i)\frac{1+i}{2}+(z-i)^2\left(\frac{1+i}{2}\right)^2+\cdots\right] \\ &= -i\frac{1+i}{2}-(z-i)\left(\frac{1+i}{2}\right)^2-(z-i)^2\left(\frac{1+i}{2}\right)^3-\cdots \\ &= \frac{1-i}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^{n+1}(z-i)^n \end{aligned}$$

Círculo de convergencia: $\{z \ / \ |z-i| < \sqrt{2}\}$, $(r = \sqrt{2})$

Problema 15
Demostrar que las series dadas a continuación son convergentes y hallar los radios de convergencia respectivos

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{e^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n!\frac{z^n}{n^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$

Solución

(a) Criterio del cociente: $\left|\dfrac{z^{n+1}/e^{n+1}}{z^n/e^n}\right| = |z|\dfrac{1}{e}$. Así, la serie es (C) si $|z|\dfrac{1}{e} < 1$, es decir, si $|z| < e$.
Dom. de (C): $\{z \ / \ |z-O| < e\}$, $r = e$. Además, si $|z| > e$ entonces la serie (D). Si $|z| = e$ entonces $|T_n| = \left|\dfrac{z^n}{e^n}\right| = 1 \not\to 0$ y, por tanto, la serie (D).

(b) $\left|\dfrac{(n+1)!z^{n+1}/(n+1)^{n+1}}{n!z^n/n^n}\right| = |z|\dfrac{n^n(n+1)(n!)}{(n+1)^{n+1}(n+1)(n!)} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n|z| = |z|\dfrac{1}{(\frac{n+1}{n})^n} = |z|\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \xrightarrow{n\to\infty} |z|\dfrac{1}{e}$
Por lo tanto, la serie (C) si $|z| < e$
Dom. de (C): $\{z \mid |z-O| < e\}$, $r = e$.
La serie (D) si $|z| > e$; si $|z| = e$ entonces $|T_n| = n!\dfrac{e^n}{n^n} \not\to 0 \Longrightarrow$ (D)

(c) $\left|\dfrac{z^{n+1}/n+1}{z^n/n}\right| = |z|\dfrac{n}{n+1} \longrightarrow |z|$ si $n \longrightarrow \infty$

Por tanto, la serie (C) si $|z| < 1$ ($r = 1$) y la serie (D) si $|z| > 1$. Si $|z| = 1$ entonces $|T_n| = \dfrac{1}{n}$, la serie armónica $\Longrightarrow$ (D)

Problema 16

Sea $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$. Obtener desarrollo en serie de potencias para f en vecindad de $z_0 = O$. Hacer lo mismo con $\dfrac{1}{(1-z)^2}$ y $\dfrac{1}{(1-z)^3}$. Hallar círculos y radios de convergencia.

Solución

$f(z) = \dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + \cdots$, serie geométrica (C) si $|z| < 1$

Por lo tanto, $f(z) = \dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ en $D = \{z \;/\; |z - O| < 1\}$, $r = 1$.

Ahora, como f es analítica en D, aplicar el teorema correspondiente para demostrar que existe $f'(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}$ en el mismo D y con el mismo $r = 1$ de la serie anterior.

Además, como $f'(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$ es analítica en D entonces $f''(z) = \dfrac{2}{(1-z)^3} \Longrightarrow \dfrac{1}{(1-z)^3} = 2f''(z)$ y, entonces, $\dfrac{1}{(1-z)^3} = 2 + 6z + 12z^2 + 20z^3 + \cdots = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)z^{k-1}$ en el mismo D y $r = 1$.

Problema 17

Halle el desarrollo de Mc Laurin de $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$

Solución

f es analítica por ser función racional con $z \neq 1$.

$\dfrac{z}{1-z} = -1 + \dfrac{1}{1-z} = -1 + (1 + z + z^2 + \cdots)$ si $|z| < 1$

Luego, $\dfrac{z}{1-z} = z + z^2 + \cdots = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} z^k$

Problema 18

Halle el desarrollo de Mc Laurin de $f(z) = e^{z^2}$

Solución

Recordemos que $e^z = 1 + \dfrac{z}{1!} + \dfrac{z^2}{4!} + \cdots$ converge $\forall\, z \in \mathbb{C}$ ($r = \infty$).

Luego, $e^{z^2} = 1 + \dfrac{z^2}{1!} + \dfrac{z^4}{2!} + \cdots + \dfrac{z^{2n}}{n!} + \cdots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^{2k}}{k!}$ converge en $\mathbb{C}$, $r = \infty$

Problema 19

Desarrolle en serie de potencias a $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^2}$ alrededor de $z = O$

Solución

$f(z)$ es analítica por ser función racional con $z \neq -1$.

Ahora, $\left(\dfrac{z}{z+1}\right)^2 = \left(1 - \dfrac{1}{z+1}\right)^2 = [1 - (1 - z + z^2 - z^3 + \cdots)]^2$ (ya que $\dfrac{1}{z+1} = \dfrac{1}{1+z} = \dfrac{1}{1-(-z)}$ es una serie geométrica) puesto que $|-z| = |z| < 1$.

$f(z) = (z - z^2 + z^3 - z^4 + z^5 - z^6 + \cdots)^2 = z^2 - 2z^3 + 3z^4 - 4z^5 + 5z^6 + \cdots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)z^{k+2}$, conv. en $|z| < 1$, $r = 1$

Problema 20
Sea f analítica $\forall z$, $|z| < 1$ y $\dfrac{1-z}{z}f'(z) = 4$ con $f(O) = O$. Hallar desarrollo en serie de Taylor en vecindad de O

Solución
$f'(z) = \dfrac{4z}{1-z}$ y, por ser f analítica, f' es continua.

Ahora, por teorema 17, podemos integrar término a término:
$f(z) = \int f'(z)\,dz = 4\int \dfrac{z}{1-z}\,dz = 4\int (-1 + \dfrac{1}{1-z})\,dz = 4\int (-1 + 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots)\,dz = 4(\dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{z^4}{4} + \cdots + \dfrac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots) + C$ y la serie integrada converge en $|z| < 1$, $r = 1$, pero $f(O) = O \Longrightarrow C = O \Longrightarrow f(z) = 4\sum_{k=2}^{\infty}\dfrac{z^k}{k} = 4\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^{k+2}}{k+2}$

Problema 21
Sin utilizar el teorema 18, hallar desarrollo en serie de potencias para f dada por $f(z) = (\operatorname{sen} z)^2$ y mostrar forma general del desarrollo.

Solución
$g(z) = \operatorname{sen} z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!} + \cdots \Longrightarrow (\operatorname{sen} z)^2 = (z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!} + \cdots)(z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!} + \cdots) = z^2 - \dfrac{z^4}{3!} + \dfrac{z^6}{5!} - \dfrac{z^8}{7!} + \cdots - \dfrac{z^4}{3!} + \dfrac{z^6}{3!3!} - \dfrac{z^8}{3!5!} + \dfrac{z^{10}}{3!7!} - \cdots + \dfrac{z^6}{5!} - \dfrac{z^8}{3!5!} + \dfrac{z^{10}}{3!7!} - \cdots = z^2 - \dfrac{2z^4}{3!} + \dfrac{6+10}{360}z^6 - \cdots = z^2 - \dfrac{2^2 2z^4}{2^2 3!} + \dfrac{2^4}{3^2 2^3 5}\dfrac{2}{2}z^6 - \cdots = z^2 - \dfrac{2^3}{4!}z^4 + \dfrac{2^5}{6!}z^5 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{2n-1}z^{2n}}{(2n)!}$ convergente en $|z| < \infty$, es decir conv en $\mathbb{C}$, $r = \infty$

Problema 22
Demuestre que si $\sum_{k=1}^{\infty} z_k = S$ entonces $\sum_{k=1}^{\infty}\overline{z_k} = \overline{S}$

Solución
Lo que queremos demostrar es que, si la primera serie converge a $S = a + bi$, que es la suma de la serie, entonces la serie de los conjugados converge al conjugado de S, $\overline{S} = a - bi$.

Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ la suma parcial n-ésima de la serie dada y $\overline{S_n} = \sum_{k=1}^{\infty}\overline{z_k}$ la suma parcial n-ésima de la serie de los conjugados.

Por hipótesis ($\sum_{k=1}^{\infty} z_k = S$), se tiene que dado $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall m > N$, se verifica que $|S - S_m| < \varepsilon$

Ahora, $|\overline{S} - \overline{S_m}| = |\overline{S - S_m}| = |S - S_m| < \varepsilon \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\overline{z_n} = \overline{S}$ como queríamos.

(Obsérvese que si $S = a + ib$ y $S_m = a_m + ib_m$, $S - S_m = a - a_m + i(b - b_m)$, $\overline{S - S_m} = a - a_m - i(b - b_m)$ y $\overline{S} - \overline{S_n} = a - ib - (a_m - ib_m) = a - a_m - i(b - b_m)$, de aquí que $|\overline{S} - \overline{S_m}| = |\overline{S - S_m}| = \sqrt{(a - a_m)^2 + (b - b_m)^2} = |S - S_m|$)

Problema 23
Sea $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica con f' continua en $|z| < 1$ y $(1 + z^2)f'(z) = 1$ con $f(O) = O$. Desarrollar f en serie de Taylor alrededor de $z_0 = O$. Dar expresión general para f.

Solución
$f'(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ y, por continuidad de f' en $|z| < 1$, se tiene que $f(z) = \int \dfrac{1}{1+z^2}dz = \int (1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots)\,dz$, ya que $\dfrac{1}{1+z^2} = \dfrac{1}{1-(-z^2)}$ es serie geométrica de razón $(-z^2)$ convergente si $|-z^2| = |z^2| < 1$, lo cual es cierto si $|z| < 1$.

Ahora, por teorema 17, $f(z) = z - \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{z^5}{5} - \dfrac{z^7}{7} + \cdots + C$ y, como $f(O) = O$, entonces se tiene que $f(O) = C = O$ y, así $f(z) = z - \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{z^5}{5} - \dfrac{z^7}{7} + \cdots$

Problema 24
Desarrollar en serie de Mc Laurin la función $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^2}$ y hallar radio de convergencia.

Solución

$$\frac{z^2}{(z+1)^2} = \left(\frac{z}{z+1}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{z+1}\right)^2 = [1-(1-z+z^2-z^3+\cdots)]^2 = (z-z^2+z^3-z^4+z^5-z^6+\cdots)^2$$

$$\begin{array}{rcccccccccccccccccc}
= & z^2 & & & + & z^4 & & & + & z^6 & & & + & z^8 & & & + & z^{10} & + & \cdots \\
 & & - & 2z^3 & + & 2z^4 & - & 2z^5 & + & 2z^6 & - & 2z^7 & + & 2z^8 & - & 2z^9 & + & 2z^{10} & - & \cdots \\
 & & & & & & - & 2z^5 & + & 2z^6 & - & 2z^7 & + & 2z^8 & - & 2z^9 & + & 2z^{10} & - & \cdots \\
 & & & & & & & & & & - & 2z^7 & + & 2z^8 & - & 2z^9 & + & 2z^{10} & - & \cdots \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

$= z^2 - 2z^3 + 3z^4 - 4z^5 + 5z^6 - 6z^7 + 7z^8 - 8z^9 + 9z^{10} - \cdots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)z^{k+2}$ convergente si $|z| < 1$ ($r = 1$).

Problema 25
Demuestre que $f(z) = e^{e^z} = e(1 + z + z^2 + \frac{5}{6}z^5 + \cdots)$ convergente en $\mathbb{C}$

Solución

Se deja como ejercicio para el estudiante

Problema 26

(a) Hallar la serie de Taylor de $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ alrededor del punto $z_0 = \dfrac{1}{2}$

(b) Expresar el resultado obtenido en (a) en forma de sumatoria.

(c) Dibujar el disco de convergencia.

(d) Estudiar la convergencia de la serie en un punto del borde.

Solución

(a) $\dfrac{1}{1-z} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-z} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}-(z-\frac{1}{2})} = \dfrac{2}{1-2(z-\frac{1}{2})}$

Ahora, $\dfrac{2}{1-2(z-\frac{1}{2})}$ será una serie geométrica si $|2(z-\frac{1}{2})| = 2|z-\frac{1}{2}| < 1 \Longleftrightarrow |z-\frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$

Luego, $f(z) = \dfrac{1}{1-z} = 2\dfrac{1}{1-2(z-\frac{1}{2})} = 2\left[1 + 2\left(z-\dfrac{1}{2}\right) + 2^2\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 2^3\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^3 + \cdots\right]$ si $\left|z-\dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$

(b) $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+1}\left(z-\frac{1}{2}\right)^k$

(c) Dom. de (C)= $\left\{z \;\middle/\; \left|z-\dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}\right\}$, que es un disco abierto (círculo) de centro $\dfrac{1}{2} + 0i$ y radio $\dfrac{1}{2}$

(d) Para cualquier punto del borde del disco, el módulo del término general es $2^{n+1}\left|z-\dfrac{1}{2}\right|^n$ el cual no tiende a cero (cuando $n \longrightarrow \infty$), lo que significa que la serie diverge

Problema 27
Hallar los cuatro primeros términos no nulos del desarrollo de $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^3+2z}$ como serie de potencias centrada en $z_0 = O$ y determine la región donde es válido el desarrollo.

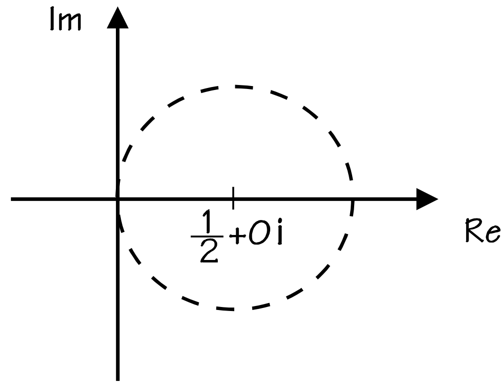


Figura 15.3:

Solución

f es un cociente de funciones elementales en $\mathbb{C}$: el numerador $1-\cos z$ y el denominador un polinomio. Por tanto, $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z(z^2+2)}$ es analítica excepto en O, $\sqrt{2}i$ y $-\sqrt{2}i$

$\dfrac{1-\cos z}{z(z^2+2)} = \dfrac{1-\cos z}{z}\dfrac{1}{2+z^2}$

Ahora, $\dfrac{1-\cos z}{z} = \dfrac{1}{z}\left[1-\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}\right] = \dfrac{1}{z}\left[1-\left(1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\cdots\right)\right] = \dfrac{z}{2!}-\dfrac{z^3}{4!}+\dfrac{z^5}{6!}-\cdots\ \forall\, z\in\mathbb{C}$; mientras que, $\dfrac{1}{2+z^2} = \dfrac{1/2}{(2+z^2)/2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\frac{z^2}{2}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-[-(\frac{z}{\sqrt{2}})^2]} = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{\sqrt{2}}\right)^2+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{\sqrt{2}}\right)^4-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{\sqrt{2}}\right)^6+\cdots$ (serie geométrica convergente$\Longleftrightarrow |z|<\sqrt{2}$).

Así, $f(z) = \left(\dfrac{z}{2!}-\dfrac{z^3}{4!}+\dfrac{z^5}{6!}-\cdots\right)\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{\sqrt{2}}\right)^2+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{\sqrt{2}}\right)^4-\cdots\right) = c_0+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\cdots$ (producto de Cauchy) con

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0b_0 = 0b_0 = 0\\
c_1 &= a_0b_1+a_1b_0 = \frac{1}{4}\neq 0\\
c_2 &= a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0 = 0\\
c_3 &= \sum_{k=1}^{3}a_kb_{3-k} = \frac{1}{8}-\frac{1}{2*4!} = -\frac{7}{48}\neq 0\\
c_4 &= 0\\
c_5 &= \frac{1}{8}+\frac{1}{4!*4}+\frac{1}{6!*2}\neq 0\\
c_6 &= 0\\
c_7 &= -\frac{1}{8}-\frac{1}{4!*4}-\frac{1}{6!*4}-\frac{1}{8!*2}\neq 0
\end{aligned}$$

siendo el desarrollo válido $\forall\, z$, $|z|<\sqrt{2}$

Problema 28

Resolver la ecuación $f''(z)+f(z)=0$ suponiendo que existe una solución de la forma $f(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ (determine los a_k!). Suponer que existe $f''(z)$)

Solución

Si $f(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ fuese solución, entonces, derivando se tendría

$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$; $f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k z^{k-2} \Longrightarrow f''(z) + f(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k z^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = 0 \Longleftrightarrow$ $\sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k = 0$, donde

$$\begin{aligned} b_0 &= 2 * 1 a_2 + a_0 \\ b_1 &= 3 * 2 * a_3 + a_1 \\ &\vdots \\ b_k &= (k+2)(k+1) a_{k+2} + a_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ahora, como el segundo miembro de $f''(z) + f(z)$ es cero, cada coeficiente del primer miembro también lo es. Así, $b_k = (k+2)(k+1) a_{k+2} + a_k = 0 \quad \forall\, k \Longrightarrow a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k+2)(k+1)} = (-1)\frac{1}{(k+2)(k+1)}(-1)\frac{a_{k-2}}{k(k-1)} =$ $(-1)^2 \frac{a_{k-2}}{(k+2)(k+1)k(k-1)} = \frac{(-1)^2}{(k+2)(k+1)k(k-1)} \frac{(-1)a_{k-4}}{(k-2)(k-3)} = (-1)^3 \frac{a_{k-4}}{(k+2)(k+1)k(k-1)(k-2)(k-3)}$.

Luego, $a_{k+2} = (-1)^{(k+1)/2} \frac{a_0}{(k+2)!}$

Tenemos así a_{k+2} en función de a_0 después de $\frac{k+2}{2}$ pasos. Ahora, si k es impar, utilizando un razonamiento similar se tiene $a_{k+2} = (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{a_1}{(k+2)!}$

Finalmente, $f(z) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$ cada una de estas dos series converge en todo $\mathbb{C}$ y además son soluciones de la ecuación dada. En otro curso (MA2115 o MA2114) probablemente se vea que esas soluciones son linealmente independientes y, así, $f(z)$ es la solución general de la ecuación dada.

Problema 29

Hallar la suma de las series dadas a continuación en el disco $\{z \,/\, |z| < 1\}$

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} z^{3k}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} k z^k$

Solución

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} z^{3k} = z^3 + z^6 + z^9 + z^{12} + \cdots = z^3(1 + z^3 + z^6 + z^9 + \cdots) = z^3 \frac{1}{1 - z^3}$ si $|z| < 1$ puesto que $1 + z^3 + z^6 + z^9 + \cdots$ es una serie geométrica de razón z^3 que sabemos que es convergente si $|z^3| < 1 \Longrightarrow |z| < 1$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} k z^k = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5 + \cdots$

Por lo tanto,
$$\begin{array}{rcccccccccccc} \sum_{k=1}^{\infty} k z^k & = & z & + & z^2 & + & z^3 & + & z^4 & + & z^5 & + \cdots \\ & & & + & z^2 & + & z^3 & + & z^4 & + & z^5 & + \cdots \\ & & & & & + & z^3 & + & z^4 & + & z^5 & + \cdots \\ & & & & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

$= z(1+z+z^2+z^3+\cdots)+z^2(1+z+z^2+z^3+\cdots)+z^3(1+z+z^2+z^3+\cdots)+\cdots = (z+z^2+z^3+\cdots)(1+z+z^2+z^3+\cdots) =$ $z(1 + z + z^2 + \cdots)(1 + z + z^2 + \cdots) = z\frac{1}{1-z}\frac{1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}$ si $|z| < 1$ puesto que hemos utilizado la serie geométrica.

Problema 30
Hallar cuatro términos del desarrollo de Taylor alrededor de $z_0 = 0$ y el mayor disco de convergencia para

$$f(z) = e^{z + \operatorname{sen} z}$$

Solución

$$e^{z+\operatorname{sen} z} = e^z e^{\operatorname{sen} z} =$$
$$= \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right) \left(1 + \frac{\operatorname{sen} z}{1!} + \frac{(\operatorname{sen} z)^2}{2!} + \frac{(\operatorname{sen} z)^3}{3!} + \frac{(\operatorname{sen} z)^4}{4!} + \cdots\right)$$

Emplee el desarrollo de $\operatorname{sen} z$ y trate de calcular los cuatro primeros términos del producto. Así obtendrá

$$1 + 2\,z + 2\,z^2 + \frac{7\,z^3}{6}$$

Problema 31
Hallar cuatro términos del desarrollo de Taylor alrededor de $z_0 = 0$ y el mayor disco de convergencia para

$$f(z) = e^z \operatorname{Log}(1 + \mathrm{z})$$

Solución

$$z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{3\,z^5}{40},$$ en el disco $|z| < 1$

Capítulo 16

Singularidades. Residuo

Objetivos: Este es uno de los capítulos más importantes de la sección de variable compleja, aquí el alumno debe estudiar con detenimiento, la clasificación de singularidades aisladas y los teoremas correspondientes. Además debe digerir con agrado la teoría de los residuos, la cual va a ser utilizada en los capítulos 17 y 18.

16.1 Conceptos básicos

A continuación presentamos dos corolarios del Teorema de Taylor que resultarán muy útiles.
Corolario 1.
Sea $f : A_{\text{abierto conexo}} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, f analítica, y sea z_0 un punto dado en A. Si $f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = 0$, entonces f es constante en A.

Corolario 2.
Sea $f : A_{\text{abierto conexo}} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, f analítica, z_0 un punto de A y se tiene otra función $g : A \to \mathbb{C}$ tal que $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$, $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$

Entonces $f(z) = g(z)\ \forall\ z \in A$.

Definición 1**. Puntos Aislados.**
Un conjunto de puntos es un conjunto de *puntos aislados*, si para cada uno de ellos, p, existe un disco con centro en p, $D(p, r)$ con r tal que en $D(p, r)$ no hay otro punto del conjunto dado.

Ejemplos
(a) Todo conjunto finito de puntos, es un conjunto de puntos aislados. Por ejemplo $A = \{0, 1, 2, \cdots, 10\}$ Recuérdese

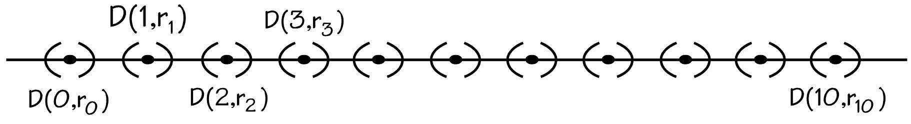


Figura 16.1:

que en la recta, un disco abierto de centro x_k y radio r_k es un intervalo abierto $(x_k - r_k, x_k + r_k) = D(x_k, r_k)$. Entonces, en nuestro caso, para cada $p \in A$ siempre existe un $D(p, r)$ tal que no existe otro punto de A de $D(p, r)$.

(b) En cambio, el conjunto infinito $B = \{z \mid |z - z_0| \leq r\} =$ Disco cerrado de centro z_0 y radio r, los puntos no son aislados.

(c) $C = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$ no consta de puntos aislados. Puesto que no existe $D(0, r)$ tal que en ese disco no hayan puntos del conjunto, esto se deduce del hecho $\frac{1}{n} \to 0$ si $n \to \infty$. (Por la derecha del cero se acumulan muchos puntos del conjunto).

(d) Si del conjunto C sacamos el 0 y construimos $D = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$ este conjunto, aunque es infinito, consta de puntos aislados.

(e) Un polinomio grado n en $\mathbb{C}$ tiene necesariamente n raices (ceros) y por ser el conjunto de sus ceros, finito, también es un conjunto de puntos aislados.

Ahora bien, como las funciones analíticas son versiones más generales que los polinomios, pareciera que los ceros de las funciones analíticas fuesen también puntos aislados (aunque el número de ceros no siempre sea finito como sucede, por ejemplo, en la función seno o coseno).

Corolario 3.
Sea $f : A_{\text{abierto conexo}} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f$ analítica y z_0 un cero de $f\ (f(z_0) = 0)$, con f no constante en A. Entonces, estudiando el corolario 2 nos damos cuenta que tiene que existir un k tal que $f^{(k)}(z_0) = 0$ (puesto que si no existiese ese $k,\ f$ no sería constante en A, en contra de la hipótesis dada aquí).

Definición 2.
Dada $f : A_{\text{abierto conexo}} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f$ analítica y z_0 un cero de f con f no constante en A, al menor índice de derivación n tal que $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ se le denomina *orden del cero.*

Teorema 1. Ceros aislados
Si f es una función analítica: $A_{\text{abierto conexo}} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},$ y f es no constante, entonces sus ceros son puntos aislados de A.

Definición 3.
Los puntos aislados de $f : A_{\text{abierto conexo}} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, donde f no es analítica se llaman *singularidades aisladas.*

Definición 4.
Los puntos de f donde f no es analítica son *singularidades de* f.
Algunos ejemplos de singularidades de f son los siguientes:

(a) 0 para $\frac{e^z}{z^2};\ \frac{\cos z}{z};\ \frac{1}{ze^z};\ e^{\frac{1}{z^2}}$.
(b) 0 y -2 para $\frac{1}{z(z+2)}$.

Ahora bien, $z_0 = 0$ *no es singularidad aislada* de la función $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)}$ puesto que $z_k = \frac{1}{k\pi},\ k = 1, 2, 3, \cdots$ también son singularidades de f. Allí, para $k \to \infty,\ z_k \to 0 \Rightarrow$ para cada $D(0, r)$ van a existir puntos z_k, singularidades de f que están en D (Contradiciendo la definición de punto aislado !).

De ahora en adelante, para abreviar, designaremos entorno de z_0 a un $D(z_0, r)$.

Clasificación de las singularidades aisladas de f.

Sea $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z_0 = a$ una singularidad aislada de f (es decir, a es punto aislado y f no es analítica en a).
(a) *Singularidad removible o evitable.* f es acotada en un entorno de a que no contiene a $a(D(a^-, r))$.
Ejemplos:

(a_1) $z_0 = 0$ es singularidad removible de f con $f(z) = \dfrac{z}{z}$, puesto que $\dfrac{z}{z} = 1 \Rightarrow |f(z)| = 1$. Recuérdese que f acotada, si existe $M \mid |f(z)| \leq M$.

(a_2) $F(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}, z_0 = 0$ es singularidad removible de f puesto que

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left|\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right| = \left|\frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots}{z}\right| \\
&= \left|1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5} - \frac{z^6}{7!} - \cdots\right| \leq 1 \quad \text{en } D(0^-, \epsilon),\ \epsilon > 0
\end{aligned}$$

(a_3) $f(z) = \dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z^3}$ tiene singularidad removible en $z_0 = 0$ puesto que

$$\begin{aligned}
\frac{z - \operatorname{sen} z}{z^3} &= \frac{1}{z^3}(z - z + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \cdots) \\
&= \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \cdots \Rightarrow |f(z)| \leq \frac{1}{3} \quad \text{en } D(0^-, \epsilon),\ \epsilon > 0
\end{aligned}$$

Teorema 2
Si $z_0 = a$ es una singularidad removible de f, entonces existe $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ y al definir $f(a) = \lim\limits_{z \to a} f(z),\ f$ pasa a ser analítica en $D(a, r)$. De allí, el hecho de que se llame a $z_0 = a$ singularidad removible o evitable, por eso f no es una "verdadera singularidad."
Así, en el caso (a_1), existe $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z}{z} = \lim\limits_{z \to 0} 1 = 1$. Luego, al definir $f(0) = 1$ para $f(z) = \dfrac{z}{z},\ a = 0$ es una singularidad removible de f.
En el caso (a_3), existe $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z^3} = \lim\limits_{z \to 0} \left(\dfrac{1}{3!} - \dfrac{z^2}{5!} + \dfrac{z^4}{7!} - \cdots\right) = \dfrac{1}{3!}$. Luego, podemos definir $f(0) = \dfrac{1}{6}$ y $z_0 = 0$ es una singularidad removible de $f(z) = \dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z^3}$.

Teorema 3.
$z_0 = a$ es singularidad removible de f si existe $\lim\limits_{z \to a} (z - a) f(z) = 0$.
Ejemplo
$f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z},\ z_0 = 0$ es singularidad removible de f. Para ello, desarrolle e^z en serie de Mc Laurin y demuestre que $\lim\limits_{z \to 0} z\, f(z) = 0$.

(b) *Polo.* $z_0 = a$ es un polo de f si es una singularidad aislada y además existe $\lim\limits_{z \to a} |f(z)| = +\infty$.
Ejemplo:
$z_0 = 0$ es polo para las siguientes funciones dadas por: $f(z) = \dfrac{1}{z^2} \left(\lim\limits_{z \to 0} \left|\dfrac{1}{z^2}\right| = \infty\right);$

$$g(z) = \frac{\cos z}{z^2} \left(\lim_{z \to 0} \left|\frac{\cos z}{z^2}\right| = \lim_{z \to 0} \left|\frac{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots}{z^2}\right| = \lim_{z \to 0} \left|\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \frac{z^4}{6!} + \cdots\right| = +\infty\right).$$

Teorema 4

Si $f(z)$ se puede expresar en la forma $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-a)^m}$ con $g(a)\neq 0$ y g analítica en un entorno de a, entonces f *tiene en* a *un polo de orden* m.
Ejemplo:
$f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2}=\dfrac{g(z)}{(z-0)^2}$. Aquí, $g(0)=1\neq 0$ y $g(z)=\cos z$ es entera, por lo tanto analítica en cualquier entorno de 0. Luego,por el teorema 3, f tiene en 0 un polo de orden 2.

Ahora bien, a veces f no puede expresarse en la forma $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-a)^m}$ con $g(a)\neq 0$ y g analítica en un entorno de $z_0=a$, pero, sin embargo, f tiene polo de orden menor o igual a m para f con $m>1$.

Teorema 5.
Sea $f:A\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z_0=a$ una singularidad aislada de $f,\ z_0$ es polo de orden $\leq m$ para $f(m>1)$ si existe $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ finito.
Ejemplo:
$f(z)=\dfrac{z}{1-\operatorname{sen}\left(\frac{z}{2}\right)}$. Consideremos la singularidad $z_0=\pi$. No podemos expresar f en la forma $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-\pi)^m}$ con $g(\pi)\neq 0$ y g analítica en un entorno de $z_0=\pi$. Podemos calcular $\lim\limits_{z\to\pi}|f(z)|=\lim\limits_{z\to\pi}\left|\dfrac{z}{1-\operatorname{sen}\left(\frac{z}{2}\right)}\right|=\dfrac{\pi}{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}=+\infty\Rightarrow z_0=\pi$ es un polo de f, pero no conocemos su orden.
Entonces recurrimos al Teorema 5:
Pensemos en que podría ser polo doble (m tiene que ser >1).
Estudiemos la existencia de $\lim\limits_{z\to\pi}(z-\pi)^2 f(z)=\lim\limits_{z\to\pi}\left[(z-\pi)^2\dfrac{z}{1-\operatorname{sen}\left(\frac{z}{2}\right)}\right]$, sea $h(z)=1-\operatorname{sen}\left(\frac{z}{2}\right),\ h(z)$ desarrollado en serie de Taylor alrededor de $z_0=\pi$, queda:

$$\begin{aligned}
h(z) &= 0+\frac{(z-\pi)}{1!}h'(\pi)+\frac{(z-\pi)^2}{2!}h''(\pi)+\cdots\\
&= (z-\pi)\times 0+\frac{1}{2!}(z-\pi)^2\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3!}(z-\pi)^3\times 0+\frac{1}{4!}(z-\pi)^4\times\left(-\frac{1}{16}\right)+\cdots\\
&\Rightarrow\ h(z)=\frac{1}{8}(z-\pi)^2-\frac{1}{384}(z-\pi)^4+\cdots\\
&\Rightarrow\ (z-\pi)^2\frac{z}{h(z)}=\frac{z}{\frac{1}{8}-\frac{1}{384}(z-\pi)^2+\cdots}\to 8\pi\ \text{ con }\ z\to\pi
\end{aligned}$$

$\Rightarrow z_0=\pi$ es polo doble de f.

Teorema 6.
Si $z_0=a$ es singularidad aislada de f, z_0 es *polo simple de* f si existe $\lim\limits_{z\to a}(z-z_0)f(z)\neq 0$.
Ejemplo:
$f(z)=\dfrac{1}{z^2-z-2}$ tiene polos simples en $z_0=-1,\ z_1=2$.
En efecto, $f(z)=\dfrac{1}{z^2-z-2}=\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}\Rightarrow\begin{cases} z_0 &= -1\\ z_1 &= 2\end{cases}$ son singularidades aisladas de f. Además, según Teorema 6,

$$\left.\begin{array}{ll}
(z+1)f(z)=\dfrac{1}{z-2}, & \text{existe}\quad \lim\limits_{z\to -1}(z+1)f(z)=-\dfrac{1}{3}\neq 0\\
(z-2)f(z)=\dfrac{1}{z+1}, & \text{existe}\quad \lim\limits_{z\to 2}(z-2)f(z)=\dfrac{1}{3}\neq 0
\end{array}\right.\ \Rightarrow z_0,z_1 \text{ son polos simples de } f.$$

(c) *Singularidad esencial* $z_0=a$ es singularidad esencial de f si f no es acotada en $D(a^-,r)$ y no existe $\lim\limits_{z\to a}|f(z)|$ y podríamos decir que f tiene un comportamiento complicado cerca de $z_0 = a$. Para estudiar este tipo de singularidades con propiedad, necesitamos las series de Laurent, las cuales no se mencionan en nuestro programa. El alumno que desee profundizar en este tema puede ver por ejemplo el Texto del Profesor Alain Etcheberry (Elementos de Variable Compleja en el Apéndice 3) o consultar la bibliografía recomendada al final de este libro. Sin embargo, podríamos establecer una definición de singularidad esencial basándonos en el desarrollo de una función en serie de Laurent, sin mencionar dicho desarrollo. Basta decir que $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tiene singularidad aislada esencial (o simplemente, singularidad esencial) si f puede desarrollarse de la forma:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_k(z-z_0)^k + \cdots \\ &\quad + \cdots + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_k}{(z-z_0)^k} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z-z_0)^{-k} \end{aligned}$$

y un número infinito de los b_k son distintos de cero.
Ejemplos:
(a)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots = \frac{1}{z-0} + \frac{1}{(z-0)^2} + \frac{(z-0)^0}{2!} + \frac{(z-0)^1}{3!} + \frac{(z-0)^2}{4!} + \cdots \end{aligned}$$

Aquí, $\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2!}, \quad a_1 = \dfrac{1}{3!}, \cdots, \quad a_n = \dfrac{1}{(n+2)!}, \cdots \\ b_1 = 1, \quad b_2 = 1 \qquad \text{y el resto de los } b_k = 0 \end{cases}$

Entonces, $z_0 = 0$ *no es singularidad esencial para* f. En los ejercicios veremos que es un polo de orden 2.

(b) En cambio,

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = z^3\left(\frac{\frac{1}{z}}{1!} - \frac{\frac{1}{z^3}}{3!} + \frac{\frac{1}{z^5}}{5!} - \frac{\frac{1}{z^7}}{7!} + \cdots\right) \\ &= \frac{(z-0)^2}{1!} - \frac{(z-0)^0}{3!} + \frac{\frac{1}{5!}}{(z-0)^2} - \frac{\frac{1}{7!}}{(z-0)^4} + \frac{\frac{1}{9!}}{(z-0)^6} - \frac{\frac{1}{11!}}{(z-0)^8} + \cdots \end{aligned}$$

Aquí, $\begin{cases} a_0 = -\dfrac{1}{3!}, \quad a_1 = 0, \cdots, \quad a_n = \dfrac{1}{1!}, \quad a_k = 0 \ \forall \ k > 2 \\ b_1 = 0, \quad b_2 = \dfrac{1}{5!} \quad b_3 = 0, \quad b_4 = \dfrac{1}{7!}, \ b_5 = 0, \ b_6 = \dfrac{1}{9!}, \cdots \end{cases}$ y, como se observa, hay un número infinito de $b_k \neq 0 \Rightarrow z_0 = 0$ es una singularidad esencial para f.

Teoría de Residuos.
Aquí daremos una definición de residuos que es diferente (aunque equivalente) a la que hallamos en muchos textos. En ésta no se hace uso de las series de Laurent y fue expuesta por el Profesor Alain Etcheberry en su libro "Elementos de Variable Compleja" en 1994.

Definición 5.
Sea $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, z_0 una singularidad aislada de f y C una circunferencia de centro z_0 y radio r, escogido r de tal manera que f sea analítica en el disco cerrado $\{z \ | \ |z - z_0| \leq r\}$ menos el punto z_0, podríamos denotar tal disco por $D[z_o^-, r]$. C se recorre en el sentido antihorario $(+)$. Definimos el "residuo" de f en z_0 por:

$$Res(f; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} f(z)dz$$

Es de notar que la definición dada no depende del radio r y podríamos elegir cualquier curva de Jordan que tenga en su interior z_0 y con sentido antihorario (la deducción se sigue por el Teorema de deformación).

Teorema 7**.**
Sea $f : A_{\text{simplemente conexo}} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f$ analítica en $A - \{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$, en donde $\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ es un conjunto finito de singularidades aisladas de f. Sea C una curva de Jordan (es decir, simple y cerrada) recorrida en sentido antihorario rodeando a las singularidades z_k. Entonces:

$$\oint_{C^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_k \in intC} Res(f; z_k)$$

Aquí se pide que A sea simplemente conexo, es decir, es conexo y no tiene huecos. **Cálculo de Residuos**

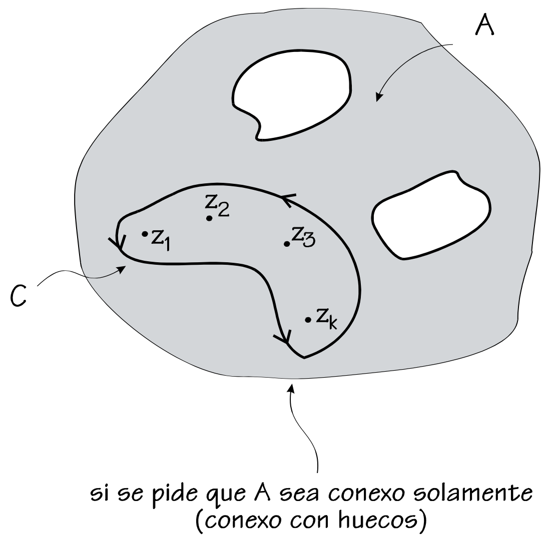


Figura 16.2:

Algunas de las fórmulas se han demostrado utilizando la definición 5.
(a_1) Si z_0 *es un polo simple de* f*,* sabemos que existe $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = l \neq 0$, entonces definimos $Res(f; z_0) = l$.

(a_2) Ahora bien, si $f(z)$ puede ser expresada en la forma $f(z) = \dfrac{g(z)}{z - z_0}$ con g analítica en $D(z_0^-, r)$ y $g(z_0) \neq 0$, sabemos por el Teorema 4 que f tiene en z_0 un *polo simple,* definimos aquí $Res(f; z_0) = g(z)$. La justificación la haremos como ejercicio.

(a_3) También introduciremos aquí otra definición de *polo simple.* z_0 es polo simple de f si $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ con $g(z_0) \neq 0,\ \ h(z_0) = 0,\ \ h'(z_0) \neq 0$. Estas dos últimas condiciones significan que z_0 es un "cero simple" de $h(z)$.
Entonces, $Res(f; z_0) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$, lo cual justificaremos en los ejercicios.

(b) Si f tiene un *polo múltiple de orden* m en z_0, con $m > 1$, definimos

$$Res(f; z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z)\right]$$

(c) Si f tiene en z_0 una *singularidad removible,* recordamos que existe entonces $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = 0$, se define aquí $Res(f; z_0) = 0$. Es decir, que siempre que exista una singularidad removible, el residuo es cero.

(d) Si f tiene en z_0 una *singularidad esencial,* hay que recurrir al desarrollo de f en serie de Laurent y se define $Res(f; z_0) = b_1$, en donde b_1 es el coeficiente de $(z - z_0)^{-1}$ en la serie mencionada. Así, en el ejemplo $f(z) = z^3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ que dimos al mencionar series de Laurent, vimos que $z_0 = 0$ es una singularidad esencial de f y que

$b_1 = 0 \Rightarrow Res(f; z_0) = 0.$

Sin embargo, en general, al tener el desarrollo en serie de Laurent para f, cualquiera que sea el tipo de singularidad aislada (removible, polo o esencial) el residuo es igual a b_1.

16.2 Ejercicios Resueltos

Problema 1
Clasificar las singularidades aisladas para f:
(a) $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$
(b) $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$
(c) $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z-i)^4}$
(d) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$
(e) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-2z-3}$
(f) $f(z) = z^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{z}\right)$

Solución
(a) $z_0 = 1$ es singularidad aislada para f: ahora veamos si existe finito $\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)$; $(z-1)f(z) = \dfrac{e^{2z}}{z-1}$, no existe $\lim_{z\to 1}\dfrac{e^{2z}}{z-1}$ finito. Por lo tanto, $z_0 = 1$ *no es polo simple*.
Veamos si es polo doble: $(z-1)^2 f(z) = e^{2z}$ y $\lim_{z\to 1} e^{2z} = e^2 \Rightarrow z_0 = 1$ es polo doble de f.

(b) $e^w = 1 + \dfrac{w}{1!} + \dfrac{w^2}{2!} + \cdots, \quad \forall\ w \in \mathbb{C}.$

Por lo tanto, $e^{\frac{1}{z^2}} = 1 + \dfrac{1}{1!z^2} + \dfrac{1}{2!z^4} = \cdots,$ aquí $z_0 = 0$ es singularidad aislada de f y es obvio que $f(z)$ no es acotada en $D(0^-, r)$. Además, no existe $\lim_{z\to 0}|f(z)|$, por lo que $z_0 = 0$ es una singualridad esencial para f.

(c) $z_0 = i$ es singularidad aislada de f. Vamos a utilizar el Teorema 5 (pensando que se trata de un polo de orden 4). Pero hay que descartar que no sea polo de orden menor (recuérdese del ejemplo que sigue al Teorema 5, la función $f(z) = \dfrac{z}{1 - \operatorname{sen}\frac{z}{2}}$ aparenta tener polo de orden 1 en $z_0 = \pi$ y, sin embargo, encontramos que era polo de orden 2).

Estudiamos $\lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\dfrac{\cos z}{(z-i)^3}$ que no es finito.

Estudiemos $\lim_{z\to i}(z-i)^2 f(z) = \lim_{z\to i}\dfrac{\cos z}{(z-i)^2}$ que no es finito.

Observamos que con exponente < 4 en $(z-i)$ no vamos a conseguir límite finito. Pasamos entonces a:

$\lim_{z\to i}(z-i)^4 f(z) = \lim_{z\to i}(\cos z) \overset{\text{cont.coseno}}{=} \cos\left(\lim_{z\to i} z\right) = \cos i = \cosh(1) \Rightarrow z_0 = i$ es polo de orden 4 para f.

(d) $f(z) = \dfrac{z^2}{[(z+i)(z-i)]^2} = \dfrac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2}.$

Es evidente que $z_0 = -i$ y $z_1 = i$ son singularidades aisladas de f, pero también es obvio que no son polos simples (demuéstrelo!). Por lo tanto, pensemos en polos dobles:

$\lim_{z\to -i}(z+i)^2 f(z)=\lim_{z\to -i}\dfrac{z^2}{(z-i)^2}=\dfrac{(-i)^2}{(-2i)^2}=\dfrac{1}{4}$ por continuidad de la función racional.
Por lo tanto, $z_0=-i$ es polo doble de f.

Demuestre que también $z_1=i$ es polo doble de f.

(e) $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-3)},\ z_0=-1,\ z_1=3$ son singularidades aisladas de f.

$\lim_{z\to -1}(z+1)f(z)=\lim_{z\to -1}\dfrac{1}{z-3}=\dfrac{1}{-4}\neq 0\Rightarrow z_0=-1$ es polo simple de f.

$\lim_{z\to 3}(z-3)f(z)=\lim_{z\to 3}\dfrac{1}{z+1}=\dfrac{1}{4}\neq 0\Rightarrow z_1=3$ es polo simple de f.

(f) $f(z)=z^2\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{3!z^3}+\dfrac{1}{5!z^5}-\cdots\right)=z-\dfrac{1}{6z}+\dfrac{1}{5!z^3}-\cdots$

$f(z)$ no es acotada en $D(0^-,r)$ y no existe $\lim_{z\to 0}|f(z)|$.

Luego, $z_0=0$, que es una singularidad aislada de f, es una singularidad esencial de f.

Problema 2
Demostrar que $f(z)=\tan z$ tiene en $z_0=\dfrac{\pi}{2}$ un polo simple.

Solución
$z_0=\dfrac{\pi}{2}$ es singularidad aislada de $f(z)=\dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$.

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)f(z) &= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} z}{\cos z}\left(\text{de la forma } \frac{0}{0}\right)\\ \overset{\text{Regla L'Hospital}}{=} & \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen} z+\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\cos z}{-\operatorname{sen} z}=-1\neq 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow z_0=\dfrac{\pi}{2}$ es polo simple de $f(z)$.

Problema 3
Calcular los residuos respectivos para las funciones de los ejercicios 1 y 2.

Solución
Del ejercicio 1.

(a)$f(z)=\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$ se demostró que $z_0=1$ es polo doble de f. Luego, por las fórmulas del cálculo de residuos, fórmula (b):

$$\begin{aligned}Res(f;1) &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left((z-1)^2 f(z)\right)\\ &= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}[e^{2z}]=\lim_{z\to 1}(2e^{2z})=2e^2.\end{aligned}$$

(b) $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}$, se demostró que $z_0=0$ es singularidad esencial para f, luego, para calcular el residuo de f en z_0 necesitamos desarrollar $f(z)$ en serie de Laurent:

$e^{\frac{1}{z^2}}=1+\dfrac{1}{1!z^2}+\dfrac{1}{2!z^4}+\cdots$, con $b_1=0$ que será el coeficiente de $(z-0)^{-1}$.

Por lo tanto, $Res(f; z_0) = 0$.

(c) $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z-i)^4}$, aquí demostramos que $z_0 = i$ es un polo de orden 4 para f.

Por lo tanto, por la fórmula (b) del Cálculo de Residuos:

$Res(f; i) = \dfrac{1}{3!}\lim\limits_{z\to i}\dfrac{d^3}{dz^3}[(z-i)^4 f(z)] = \dfrac{1}{6}\lim\limits_{z\to i}\dfrac{d^3}{dz^3}(\cos z)$.

Ahora, $\dfrac{d}{dz}(\cos z) = -\operatorname{sen} z,\ \ \dfrac{d^2}{dz^2}(\cos z) = -\cos z,\ \ \dfrac{d^3}{dz^3}(\cos z) = \operatorname{sen} z.$

Por lo tanto, $Res(f; i) = \dfrac{1}{6}\lim\limits_{z\to i}(\operatorname{sen} z) \overset{?\text{‘porque?}}{=} \dfrac{1}{6}\operatorname{sen}(i) = \dfrac{i}{6}\operatorname{senh}(1).$

(d) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$, $z_0 = -i$ y $z_1 = i$ son polos dobles de f. Por lo tanto,

$Res(f; -i) = \dfrac{1}{1!}\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{d}{dz}[(z+i)^2 f(z)] = \lim\limits_{z\to -i}\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{z^2}{(z-i)^2}\right];$

$\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{z^2}{(z-i)^2}\right] = \dfrac{2z(z-i)^2 - z^2\cdot 2(z-i)}{(z-i)^4} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} Res(f; -i) &= \lim_{z\to -i}\frac{2z(z-i)^2 - z^2\cdot 2(z-i)}{(z-i)^4} = \frac{-2i(-2i)^2 - 2(-1)(-2i)}{(-2i)^4} \\ &= \frac{(-2i)(-4) - 4i}{16} = \frac{4i}{16} = \frac{i}{4} \end{aligned}$$

Demuestre que $Res(f; i) = -\dfrac{i}{4}$

(e) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-2z-3)}$. Ya se demostró que $z_0 = -1$ y $z_1 = 3$ son polos simples de f y que

$\lim\limits_{z\to -1}(z+1)f(z) = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow Res(f; -1) = -\dfrac{1}{4},$

$\lim\limits_{z\to 3}(z-3)f(z) = \dfrac{1}{4} \Rightarrow Res(f; 3) = \dfrac{1}{4}$. utilizando la fórmula (a_1) del Cálculo de Residuos.

(f) $f(z) = z^2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{z}\right)$. Demostramos que $z_0 = 0$ es singularidad esencial de f y que $f(z) = z - \dfrac{1}{6z} = \dfrac{1}{5!z^3} - \cdots$

Luego, $b_1 = -\dfrac{1}{6} = Res(f; 0)$ (fórmula (d) del Cálculo de Residuos).

Del ejercicio 2. $f(z) = \tan z$, se demostró que tiene polo simple en $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$ y que $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(z - \dfrac{\pi}{2}\right)f(z) = -1 \Rightarrow$ $Res(f; \dfrac{\pi}{2}) = -1.$

Problema 4

Utilizar explícitamente la definición 5: $Res(f; z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C+} f(z)dz$ con C curva de Jordan y $z_0 \in intC$ para el cálculo de los residuos de los ejercicios 1 (a) y (c).

Solución

(a) $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$. Sabemos que $z_0 = 1$ es singularidad aislada de f. Sea C una curva de Jordan en $\mathbb{C}$ orientada positivamente $(+)$ y con $z_0 = 1 \in intC$.

Por definición 5: $Res(f;1) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{C+} \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz$.

Pero, aplicando la fórmula integral de Cauchy para las derivadas: $g(z) = e^{2z}$ es entera, C es curva de Jordan y $z_0 = 1 \in intC, \;\; n+1 = 2 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow$

$\displaystyle\oint_{C+} \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2} = \dfrac{2\pi i}{1!}g'(1) = 2\pi i 2e^2 = 4\pi i e^2 \Rightarrow Res(f;1) = \dfrac{1}{2\pi i}4\pi i e^2 = 2e^2$, resultado qu ecoincide con el obtenido en el ejercicio $3-1$(a).

(c) $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z-i)^4}, \quad Res(f;i) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{C+} \dfrac{\cos z}{(z-i)^4}dz.$

Aplicar de nuevo fórmula de integral de Cauchy para las derivadas con $n+1 = 4 \Rightarrow n = 3$ (Verifique las condiciones correspondientes).

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\oint_{C+} \frac{\cos z}{(z-i)^4}dz &= \frac{2\pi i}{3!}\frac{d^3}{dz^3}[\cos z]_{z=i} = \frac{2\pi i}{6}(\operatorname{sen} i) \\ &= \frac{2\pi i}{6} i \operatorname{senh}(1)\end{aligned}$$

y $Res(f;i) = \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{2\pi i}{6} i \operatorname{senh}(1) = \dfrac{i \operatorname{senh}(1)}{6}$.

Problema 5

Sea $f(z) = \dfrac{\cos(\pi z)}{z^2(z-1)}$

(a) Clasificar las singularidades de f.

(b) Hallar los residuos de f en sus singularidades respectivas.

(c) Calcular $\displaystyle\oint_C f(z)dz$, $C = \{z| \;\; |z+\frac{1}{2}| = 3\}$

Solución

(a) Las singularidades aisladas de f son claramente $z_0 = 0$ y $z_1 = 1$ (puntos donde f no es analítica).

Ahora bien, pareciera que $z_0 = 0$ es doble para f, pero no podemos descartar la posibilidad de que sea simple. A tal efecto estudiamos $\displaystyle\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\cos(\pi z)}{z(z-1)}$ que no es finito (por lo tanto decimos que no existe) $\Rightarrow z_0 = 0$ no es polo simple.

Estudiemos por lo tanto $\displaystyle\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\cos(\pi z)}{z-1} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow z_0 = 0$ es polo doble de f.

Ahora con $z_1 = 1$, $\displaystyle\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{\cos(\pi z)}{z^2} = \frac{-1}{1} = -1 \neq 0 \Rightarrow z_1$ es un polo simple de f.

(b) $Res(f;z_1) = Res(f;1) = -1$

$$Res(f;z_0) = Res(f;0) = \frac{1}{1!}\;\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[z^2 f(z)] = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{\cos(\pi z)}{z-1}\right] = \lim_{z\to 0}\frac{-\pi[\operatorname{sen}(\pi z)](z-1) - \cos(\pi z)}{(z-1)^2} = \frac{-1}{1} = -1$$

$Res(f;0) = -1$

(c) $\displaystyle\oint_C f(z)dz$. Dom$f = \mathbb{C}\setminus\{0,1\} = A$ y f es analítica en A que es un conjunto abierto conexo. C es una curva de Jordan en A, el $intC \subset A$ y $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ singularidades de f están en $intC$. Luego, aplicando el Teorema de los residuos se tiene:

$\oint_C f(z)dz = 2\pi i[R_0 + R_1]$ con $R_0 = -1 = Res(f;0)$ y $R_1 = -1 = Res(f;1)$. Así la integral vale $-4\pi i$.

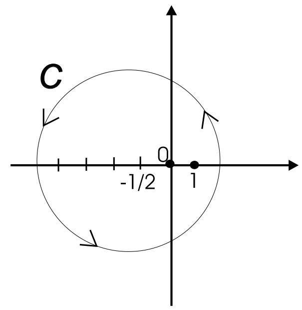


Figura 16.3:

Problema 6

(a) Clasificar las siguientes singularidades y hallar residuos de f en ellas, para $f(z) = \dfrac{(1-z)^2}{\cos z}$

(b) Calcular $I = \oint_C f(z)dz$, C descrita por $\sigma(t) = 4e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$

Solución

(a) Las singularidades aisladas de f son los puntos en donde f no es analítica, estos son los ceros de $\cos z$ (por ser $f(z)$ un cociente de funciones analíticas)

$\cos z = 0 \leftrightarrow z_k = \pm(2k+1)\dfrac{\pi}{2}; k = 0, 1, 2, \ldots$

Ahora $\lim\limits_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) = \lim\limits_{z \to z_k} \dfrac{(z - z_k)(1-z)^2}{\cos z} \left(\text{de la forma } \dfrac{0}{0}\right)$

$\overset{\text{Regla L'Hospital}}{=} \lim\limits_{z \to z_k} \dfrac{(1-z)^2 - 2(z-z_k)(1-z)}{-\operatorname{sen} z} = \dfrac{(1-z_k)^2}{-\operatorname{sen} z_k} = l_k$

pero para $k = 0, 1, 2, \ldots, \quad (1-z_k)^2 \neq 0$ y $\operatorname{sen} z_k = 1, -1, 1, -1, \ldots$.

Por lo tanto, $l_k \neq 0$ para cada k. $\Rightarrow z_k$ son polos simples de f y $Res(f; z_k) = l_k = -\dfrac{(1-z_k)^2}{\operatorname{sen} z_k}$

(b) C es una circunferencia de centro 0 y radio 4, recorrida en sentido antiorario. Además entre los z_k, los únicos que están en $intC$ son para $k = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{\pi}{2}; \quad z_0^* = -\frac{\pi}{2}$

Así $R_0 = -\dfrac{(1-\frac{\pi}{2})^2}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = -(1 - \dfrac{\pi}{2})^2$

$R_0^* = -\dfrac{(1+\frac{\pi}{2})^2}{\operatorname{sen} -\frac{\pi}{2}} = (1 + \dfrac{\pi}{2})^2$

y por Teorema de los residuos: $I = 2\pi i(R_0 + R_0^*) = 4\pi^2 i$

Problema 7

Sea $f(z) = \dfrac{1}{(z^4+1)}$

(a) Calcular las singularidades de f.

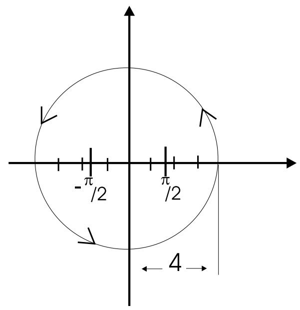


Figura 16.4:

(b) Calcular $I = \oint_C f(z)dz$, con C la unión entre el arco de circunferencia dada por $\sigma(t) = 2e^{it}, \quad t \in [0, \pi]$ y el siguiente $[-2, 2]$.

Solución

(a)$z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow z_k = \sqrt[4]{-1} = cis\dfrac{\pi + 2k\pi}{4}, \;\; k = 0, 1, 2, 3.$

Por lo tanto, $z_k = e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i} = e^{\frac{(1+2k)\pi i}{4}}, \;\; k = 0, 1, 2, 3.$

$z_0 = e^{\frac{\pi i}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \;\; z_1 = e^{\frac{3\pi i}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), \;\; z_2 = e^{\frac{5\pi i}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1-i), \;\; z_3 = e^{\frac{7\pi i}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

(b) Recordando que $|z_k| = 1 \Rightarrow z_k$ están en circunferencia (0,1), pero de ellos sólo z_0 y z_1 están en $intC$. Luego por Teorema de los residuos: $I = 2\pi i(R_0 + R_1)$

Vamos a recurrir a la fórmula (a_3) del Cálculo de residuos: z_p es polo simple de $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ si $g(z_p) \neq 0, \;\; h(z_p) = 0, \;\; h'(z_p) \neq 0$ en cuyo caso $Res(f; P) = \dfrac{g(z_p)}{h'(z_p)}$.

En nuestro ejercicio, $f(z) = \dfrac{1}{(z^4+1)} = \dfrac{g(z)}{h(z)}$

$g(z) = 1 \Rightarrow g(z) \neq 0$ para cualquier $z, \; h(z) = z^4 + 1$ y $h(z_0) = h(z_1) = 0$ por ser z_0 y z_1 dos raices de $z^4 + 1$.

Finalmente, $h'(z) = 4z^3, \;\; h'(e^{\frac{\pi i}{4}}) = e^{\frac{3\pi i}{4}} \neq 0$

Además $h'(e^{\frac{3\pi i}{4}}) = 4e^{\frac{9\pi i}{4}} \neq 0$, por lo tanto z_0 y z_1 son polos simples de f y los residuos correspondientes son:

$R_0 = \dfrac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}} = \dfrac{1}{4}e^{-\frac{3\pi i}{4}} = \dfrac{1}{4}e^{\frac{\pi i}{4} - \pi i} = \dfrac{1}{4}\dfrac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{e^{\pi i}}$

pero $e^{\pi i} = \cos\pi + i\operatorname{sen}\pi = -1 \Rightarrow R_0 = -\frac{1}{4}e^{\frac{\pi i}{4}}$

$R_1 = \dfrac{1}{4e^{\frac{9\pi i}{4}}} = \dfrac{1}{4}e^{-\frac{9\pi i}{4}} = \dfrac{1}{4}\dfrac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{e^{2\pi i}} = e^{-\frac{\pi i}{4}}$

Por lo tanto, $I = 2\pi i(R_0 + R_1) = 2\pi i(-\dfrac{1}{4}e^{\frac{\pi i}{4}} + \dfrac{1}{4}e^{-\frac{\pi i}{4}}) = -\dfrac{2\pi i}{4}(e^{\frac{\pi i}{4}} - e^{-\frac{\pi i}{4}}) = -\dfrac{\pi i}{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} - \left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\right] = -\dfrac{\pi i}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} - \cos\dfrac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$ $\Big\{$ Recordar que cos es par y sen es impar

Pot lo tanto $I = -\dfrac{\pi i}{2}\left(2i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow I = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$

Problema 8

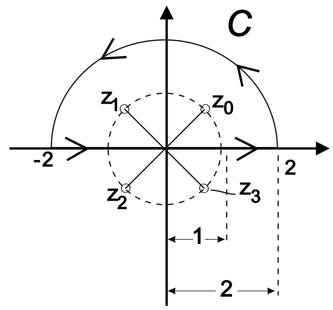


Figura 16.5:

Calcular $I = \oint_C (\tan z)dz$, C curva descrita por $\sigma(t) = \dfrac{\pi}{2} + e^{it}$

Solución

$f(z) = \dfrac{\text{sen } z}{\cos z}$ es cociente de dos funciones enteras, por lo tanto será analítica en todo z, excepto los que anulan al denominador, los cuales son $z_k = -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \ldots$

Luego cos $k = 0, 1, 2, \ldots$; los z_k son las singularidades aisladas de f, pero el único en $intC$ es una circunferencia centro $\frac{\pi}{2}$ y radio 1. Ahora $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}} (z - \dfrac{\pi}{2})\dfrac{\text{sen } z}{\cos z}\left(\text{de la forma } \dfrac{0}{0}\right)$

$\overset{\text{Regla L}'\text{Hospital}}{=} \lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{sen } z + (z - \frac{\pi}{2}) \cos z}{-\text{ sen } z} = -1 \neq 0.$

Así que $z_0 = \frac{\pi}{2}$ es polo simple de f y $Res(f; z_0) = -1$. Entonces, por el Teorema de los residuos:

$I = 2\pi i(-1) = -2\pi i.$

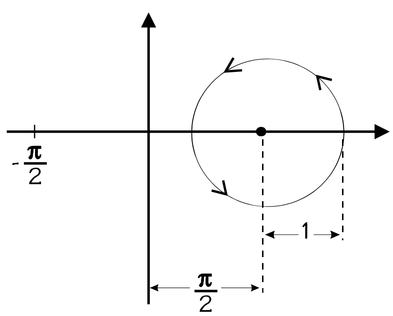


Figura 16.6:

Problema 9

Calcular $I = \oint_{C^-=\{|z|=4\}} \dfrac{z^3 + 1}{(z-2)^2(z^2+4)}dz.$

Solución

Obsérvese que aquí el sentido es (-).

Demuestre que $z_0 = 2$ es polo doble de f con $Res(f; z_0) = \dfrac{15}{16}$ y que $z_1 = 2i,\ z_2 = -2i$ son polo simples con

$Res(f;z_1) = \dfrac{1-8i}{32}, \; Res(f;z_2) = \dfrac{1+8i}{32}$

Aplique la teoría correspondiente para concluir que $I = -2\pi i$.

Problema 10

Calcular $I = \displaystyle\oint_{C^+=\{|z|=\frac{3}{2}\}} \frac{3z+2}{z^2+z^3}dz$

(a) Utilizar el Teorema del Residuo para demostrar que $I = 0$.

(b) Utilizar el Teorema de Deformación y la fórmula de la integral de Cauchy para las derivadas para demostrar que $I = 0$.

Solución

Queda como ejercicio para el alumno.

Problema 11

Calcular $Re \;\; I$ y $Im \;\; I$ con $I = -\dfrac{1}{2i}\displaystyle\oint_{C^+=\{|z|=1\}} \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}dz$

Solución

Obsérvese lo complicado de esta integral. Sin embargo, la podemos atacar con la Teoría de los Residuos.

Sea $\dfrac{1}{2i}f(z) = -\dfrac{1}{2i}\dfrac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}$ obviamente una función racional, luego, será analítica en todo z excepto los ceros del denominador. Estos son: $z_1 = 0, z_2 = \frac{1}{2}, z_3 = 2$.

Demuestre que z_1 es un polo de orden 3 y que z_2 y z_3 son polos simples.

Dibuje C y observe que sólo $z_1 \; z_2 \in int\, C$. Para los residuos de f en z_1 y z_2:

Para $z_1 = 0, \;\; \dfrac{z^6+1}{z^3} \cdot \dfrac{-1}{1-2z} \cdot \dfrac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}}$

$\dfrac{1}{1-2z}$ es serie geométrica convergente $\Leftrightarrow |2z| = 2|z| < 1 \Leftrightarrow |z| < \dfrac{1}{2}$. Por lo tanto,

$\dfrac{1}{1-2z} = (1 + 2z + 4z^2 + 8z^3 + \cdots)$

$\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}$ es serie geométrica convergente $\Leftrightarrow \left|\dfrac{z}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$.

Luego, para $z_0 = 1$ se tiene:

$\dfrac{1}{2}\dfrac{z^6+1}{z^3}(1 + 2z + 4z^2 + 8z^3 + \cdots)\left(1 + \dfrac{z}{2} + \dfrac{z^2}{4} + \dfrac{z^3}{8} + \cdots\right)$

Así, $Res(f;z) = b_1 = \text{ coeficiente de } (z-0)^{-1} = \text{ coeficiente de } \dfrac{1}{z}$ en la serie de Laurent de

$\dfrac{z^6+1}{z^3} \cdot \dfrac{-1}{1-2z} \cdot \dfrac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}}$

b_1 se obtiene de coeficiente de $\dfrac{1}{z}$ en $\dfrac{1}{2}\left(z^3 + \dfrac{1}{z^3}\right)\left[1 + z\left(2 + \dfrac{1}{2}\right) + z^2\left(4 + 1 + \dfrac{1}{4}\right) = \cdots\right]$

$= \text{ coef. de } \dfrac{1}{z} \text{ en } \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z^3}z^2\left(4 + 1 + \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{21}{8}\dfrac{1}{z} \Rightarrow b_1 = \dfrac{21}{8}.$

$Res(f;0)=\dfrac{21}{8}$

Para $z_2=\dfrac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} Res(f;\tfrac{1}{2}) &= \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)} = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{z^6+1}{2(z-2)z^3} \\ &= \frac{\frac{1+2^6}{2^6}}{\frac{3}{-8}} = -\frac{65}{24}\neq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow Res(f;\dfrac{1}{2})=-\dfrac{65}{24}$

Verificar las condiciones del Teorema de los Residuos:

$I=2\pi i\left(-\dfrac{1}{2i}\right)\left(\dfrac{21}{8}-\dfrac{65}{24}\right)=\dfrac{\pi}{12}$

$\Rightarrow Re\ I=\dfrac{\pi}{12},\ \ Im\ I=0.$

Problema 12

Utilizar el Teorema de los Residuos para demostrar que $\displaystyle\oint_{C^+=\{|z|=2\}}\frac{\cos(\pi z)}{(z^2+1)z^2}dz=0$

Solución

$f(z)=\dfrac{\cos(\pi z)}{(z^2+1)z^2}$ es analítica para todo z excepto aquellos que anulan el denominador, y ellos son $z_0=0$ (demuestre que es polo doble y que $Res(f;z_0)=0$), $z_1=i,\ z_2=-i$ (demuestre que z_1,z_2 son polo simples y que $Res(f;i)=\dfrac{i\cosh(\pi)}{2},\ Res(f;-i)=-\dfrac{i\cosh(\pi)}{2}$)

Verifique las condiciones del Teorema de los Residuos y concluya que la integral dada es igual a $2\pi i[0+i(\cosh\pi)(1-1)]=0$.

Nota didáctica: Hay ejercicios donde no es necesario aplicar el Teorema de los Residuos. Sin embargo, éste se aplica para simplificar muchos problemas.

Problema 13

Sea $f:A\subset\mathbb{C}\Longrightarrow\mathbb{C}$ tal que $f(z)$ puede ser expresada en la forma $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)}$ con g analítica en $D(z_0^-:r)$ y $g(z_0)\neq 0$.

Demuestre que f tiene en z_0 un polo simple y que $Res(f:z_0)=g(z_0)$.

Solución

Por el Teorema 4, si $f(z)$ se puede expresar en la forma $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-a)^m},\ \ g(a)\neq 0$, g analítica en un entorno de a, entonces f tiene en a un polo de orden m.

En nuestro ejercicio, $z_0=a,\ m=1$ y el entorno de z_0 es un disco aberto centro z_0 (sin el z_0) con radio r (o sea: $D(z_0^-;r)$). Luego f tiene en z_0 un polo simple.

Ahora por el Teorema de los residuos:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_k \in intC} Res(f : z_k)$$

en nuestro caso $= 2\pi i \;\; Res(f : z_0) \Rightarrow Res(f : z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{g(z)}{z - z_0}dz$ y si Ud. verifica las condiciones de la fórmula integral de Cauchy (C14 - Teorema 1) $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{g(z)}{z - z_0}dz = g(z_0)$ con lo cual queda demostrado el ejercicio.

Problema 14

Sea $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ donde $h(z)$ tiene un cero simple en z_0 (lo cual significa que $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$) y $g(z)$ analítica en $D(z_0^-, r)$ con $g(z_0) \neq 0$. Demostrar que f tiene un polo simple en z_0 y que $Res(f; z_0) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

Solución

$f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}, \;\; (z - z_0)f(z) = \dfrac{g(z)}{\frac{h(z)}{z - z_0}} = \dfrac{g(z)}{\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}}$

Ahora, vamos a ver si existe y es igual a cero $\lim\limits_{z \to z_0}(z - z_0)f(z) = \dfrac{\lim_{z \to z_0} g(z)}{\lim_{z \to z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}}$

Pero, $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = g(z_0) \neq 0$ por hipótesis, ya que g es analítica en $D(z_0, r) \Rightarrow g$ es continua allí.

También se tiene $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = h'(z_0) \neq 0$ por hipótesis.

Así, que existe $\lim\limits_{z \to z_0}(z - z_0)f(z) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)} \neq 0 \Rightarrow f$ tiene polo simple en z_0 y $Res(f; z_0) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$ en virtud de la fórmula (a_1) del cálculo de residuos.

Problema 15

Calcular $I = \oint_C \dfrac{dz}{z^4 + 1}$, con C la circunferencia de ecuación cartesiana: $x^2 + y^2 = 1,6x$

Solución

$f(z) = \dfrac{1}{z^4 + 1}$ es la misma función del ejercicio 7, entonces tenemos las singularidades de f:

$z_0 = e^{\frac{\pi i}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), \;\; z_1 = e^{\frac{2\pi i}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i), \;\; z_2 = e^{\frac{5\pi i}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i), \;\; z_3 = e^{\frac{7\pi i}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$

C aquí es la circunferencia dada por: $x^2 + y^2 = 1,6x \Rightarrow (x - 0,8)^2 + y^2 = 0,64$ (centro 0,8 y radio 0,8). Ahora $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071$, luego sólo están en $intC$; z_0 y z_3. Observar que aquí el recorrido es . De manera análoga a como se hizo en el ejercicio 7, aquí se demuestra que z_0 y z_3 son polos simples de f y los residuos son:

$R_0 = Res(f : z_0) = \dfrac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}} == -\dfrac{1}{4}e^{\frac{\pi i}{4}}$ (se calculó en el ejercicio 7).

$R_3 = Res(f : z_3) = \dfrac{1}{4e^{\frac{21\pi i}{4}}} = \dfrac{1}{4}e^{-\frac{21\pi i}{4}} = \dfrac{1}{4}e^{-\frac{5\pi i}{4}}e^{-\frac{16\pi i}{4}} = \dfrac{1}{4}e^{-\frac{5\pi i}{4}}e^{-4\pi i} = \dfrac{1}{4}e^{-\frac{5\pi i}{4}}$ puesto que $e^{-4\pi i} = 1$ (e^z es periódica con periodo 2π) $\Rightarrow R_3 = -\dfrac{1}{4}e^{-\frac{\pi i}{4}}e^{-\frac{\pi i}{4}} = -\dfrac{1}{4}e^{-\frac{\pi i}{4}}$

Verificar condiciones del Teorema de los residuos y concluir que: $I = -2\pi i\left(-\dfrac{1}{4}e^{-\frac{\pi i}{4}} - \dfrac{1}{4}e^{-\frac{\pi i}{4}}\right) = \dfrac{\pi i}{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{4} + \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right.$

$$\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi i}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} i$$

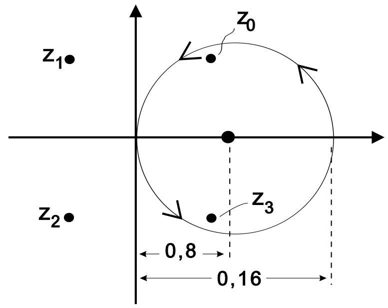


Figura 16.7:

Capítulo 17

Aplicación del Teorema de los Residuos a la evaluación de algunas integrales definidas

Objetivos: Evaluar algunas integrales definidas, mediante aplicación del Teorema de los residuos.

17.1 Conceptos básicos

Queremos evaluar integrales definidas del tipo $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)d\theta$, en donde R es una función racional del coseno, del seno o de ambos.

Si recordamos que $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ y $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$ y ponemos $z = e^{i\theta}$, entonces será $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$; $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$; $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta \Rightarrow d\theta = \dfrac{dz}{iz} = -\dfrac{idz}{z}$.

Luego, $R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)d\theta = -\dfrac{i}{z}R\left[\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right); \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)\right]dz$ y si hacemos

$f(z) = -\dfrac{i}{z}R\left[\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right); \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)\right]$ podemos calcular

$\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)d\theta$ mediante $\displaystyle\oint_{C^+=\{|z|=1\}} f(z)dz$ siempre que no haya singularidades de f sobre la curva C dada por $|z| = 1$. (Sólo valdrá la igualdad entre las dos integrales en el caso de singularidades de f en el interior de C). Ahora, se aplica el teorema de los Residuos.

En el caso particular en que $R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ sea una "función par" respecto a θ $\quad (R(-\theta) = R(\theta))$,
entonces $\displaystyle\int_0^{\pi} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)d\theta.$

17.2 Ejercicios Resueltos

Problema 1
Calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\operatorname{sen}\theta}, \quad a > b > 0$

Solución

Poner $z = e^{i\theta}, \quad dz = ie^{i\theta}d\theta \ \Rightarrow \ d\theta = -\dfrac{idz}{z}$

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$

Luego $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\operatorname{sen}\theta} = \int_{|z|=1} \frac{-\frac{idz}{z}}{a + \frac{b}{2i}\left(z - \left(\frac{1}{z}\right)\right)} = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{bz^2 + 2iaz - b} = 2\oint_{|z|=1} \frac{dz}{b(z - z_1)(z - z_2)}$

con z_1 y z_2 las raices de $bz^2 + 2iaz - b = 0 \ \Rightarrow z_1 = -\dfrac{i}{b}(a + \sqrt{a^2 - b^2}); \quad z_2 = \dfrac{i}{b}(\sqrt{a^2 - b^2} - a)$

Ahora bien, como $a > b \Rightarrow |z_2| < |z_1|$, observe que $z_1 z_2 = -\dfrac{b}{b} = -1 \ \Rightarrow |z_1 z_2| = 1$, se deduce que $|z_2| < 1$ y $|z_1| > 1$.

Luego $z_2 \in intC, \ z_1 \notin intC$.

Así que $f(z) = \dfrac{2}{(bz^2 + 21az - b)}$ es analítica en todo C excepto en z_1 y z_2, pero sólo $z_2 \in intC$ y por el Teorema de los residuos:

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\operatorname{sen}\theta} = \oint_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i \ \ Res(f; z_2)$

Ahora estudiemos la existencia de $\displaystyle\lim_{z\to z_2}(z - z_2)f(z) = \lim_{z\to z_2}\frac{2}{b(z - z_1)} = \frac{2}{b(z_2 - z_1)} = \frac{1}{i}\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \neq 0$ al ser $a > b > 0 \ \Rightarrow z_2$ es polo simple de f y $Res(f; z_2) = \dfrac{1}{i\sqrt{a^2 - b^2}} \Rightarrow I = \dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

Problema 2

Demuestre que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \ \ a > b > 0.$

Solución

Queda como ejercicio para el alumno.

Problema 3

Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta}, \ \ a > b > 0.$

Solución

Como coseno es una función par y $a > b > 0$, resulta que $\dfrac{1}{a + b\cos\theta}$ es función par

$\left(\dfrac{1}{a + b\cos(-\theta)} = \dfrac{1}{a + b\cos\theta}\right).$

Luego, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta}$, y por el resultado del ejercicio 2 se puede concluir que

$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$

Problema 4
Calcular $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{5+4\cos\theta}$

Solución
$a=5,\ \ b=4,\ \ a>b>0.$
Según el ejercicio (3), $I = \dfrac{\pi}{\sqrt{25-16}} = \dfrac{\pi}{3}$, sin embargo no podemos utilizarlo como una tabla de integrales, lo que si podemos es observar que $\dfrac{1}{5+4\cos\theta}$ es función par respecto de θ.

Por lo tanto $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\cos\theta}$, hacer $z=e^{i\theta},\ dz = ie^{i\theta}d\theta$

$d\theta = -\frac{idz}{z},\ \ \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\ \ \Rightarrow I = -\dfrac{i}{2}\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{dz}{2z^2+5z+2}\ ,\ \ 2z^2+5z+2=0\ \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -\frac{1}{2} \\ z_2 = -2\end{cases}$

$|z_1|<1\ \Rightarrow\ z_1 \in intC,\ \ |z_2|>1\ \Rightarrow\ z_2 \notin intC$

Verifique Ud. las condiciones del Teorema de los residuos y concluiremos que $I = -\dfrac{i}{2}(2\pi i)(R_1)$, con $R_1 = Res(f;z_1)$.

Aquí $f(z) = \dfrac{1}{2z^2+5z+2}$. Estudiemos $\displaystyle\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\left(z+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2z^2+5z+2}$, podríamos factorizar el denominador como hicimos en la parte teórica, sin embargo no es necesario, podemos observar que el posible límite en cuestión es de la forma $\dfrac{0}{0}\ \ \Rightarrow \displaystyle\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\left(z+\frac{1}{2}\right)f(z) = \lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{1}{4z+5} = \frac{1}{3}$ (Empleando la Regla de L'Hospital)

Por lo tanto $z_1 = -\dfrac{1}{2}$ es un polo simple de f y $R_1 = \dfrac{1}{3}$. Finalmente: $I = -\dfrac{i}{2}(2\pi i)\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

Problema 5
Calcular: $I = \displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta}$.

Solución
$\operatorname{sen}\theta$ es función impar ($\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$) pero $\operatorname{sen}^2\theta$ es función par y también lo es la función $\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2\theta}$, por lo tanto $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta}$. Ahora haciendo los cambios correspondientes, según la teoría conocida, se llega a $I = 2i\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{z^4-6z^2+1}$, ¡hágalo! y convénzase de llegar a esa expresión. Obsérvese que $z^4-6z^2+1 = n^2-6n+1 = 0$ con $n=z^2\ \Rightarrow n = \dfrac{6\pm\sqrt{36-4}}{2} = \dfrac{6\pm4\sqrt{2}}{2} = 3\pm2\sqrt{2}\ \Rightarrow z = \pm\sqrt{3\pm2\sqrt{2}}\ \Rightarrow z_1 = \sqrt{3+2\sqrt{2}},\ z_2 = \sqrt{3-2\sqrt{2}},\ z_3 = -\sqrt{3+2\sqrt{2}},\ z_4 = -\sqrt{3-2\sqrt{2}}$. Ahora $z_1 \approx 2,4142;\ \ z_2 \approx 0,4142,\ \ z_3 = -2,4142,\ \ z_4 = -0,4142.$
De modo que sólo z_2 y z_4 estań en $intC\ (|z|<1)$

Emplee Ud. procedimiento similar al empleado en el (5) para demostrar que z_2 y z_4 son polos simples de $\dfrac{z}{z^4-6z+1}$ y que $R_2 = Res(f;z_2) = -\dfrac{1}{(4z_2^2-12)},\ \ \ R_4 = Res(f;z_4) = -\dfrac{1}{(4z_4^2-12)} = -\dfrac{1}{(4z_2^2-12)}$

Finalmente, verifique las condiciones del Teorema de los residuos y concluya que $I = (2i)(2\pi i)\dfrac{-2}{4z_2^2-12} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\ \ \Rightarrow$ $I = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$

Problema 6

Demuestre que $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b\operatorname{sen}\theta)^2} = \frac{2a\pi}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}$, con $a > b > 0$.

Solución

Haciendo los cambios adecuados, según la teoría Ud. debe llegar a

$$I = -i\oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{z}}{\left[a + \frac{b}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]^2} = 4i\oint_C \frac{zdz}{(bz^2 + 2iaz - b)^2} = \frac{4i}{b^2}\oint_C \frac{zdz}{\left(z^2 + \frac{2iaz}{b} - 1\right)^2} = \frac{4i}{b^2}\oint_C \frac{zdz}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}$$

$$z^2 + \frac{2ai}{b}z - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2-b^2}}{b}i; \quad z_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2-b^2}}{b}i$$

$|z_2| = \frac{a}{b} + \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} > \frac{a}{b} > 1$ (puesto que $a > b > 0$) $\Rightarrow \quad z_2 \notin intC$

Recuerde que $z_1 z_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad |z_1| = \frac{1}{|z_2|} < 1 \quad \Rightarrow z_1 \in intC$.

Vamos a demostrar que en z_1 hay polo de orden 2 para $f(z) = \frac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}$

$$\lim_{z\to z_1} \frac{z}{(z-z_2)^2} = \frac{z_1}{(z_1-z_2)^2} = \frac{\frac{\sqrt{a^2-b^2}-a}{b}i}{\left[\frac{i}{b}(\sqrt{a^2-b^2}-a) + \frac{i}{b}(\sqrt{a^2-b^2}+a)\right]^2} = \frac{b(a-\sqrt{a^2-b^2})i}{4(a^2-b^2)}$$ el cual existe, finito.

Ahora $R_1 = \frac{1}{1!}\lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z-z_2)^2}\right] = \lim_{z\to z_1}\frac{(z-z_2)^2 - 2z(z-z_2)}{(z-z_2)^4} = \lim_{z\to z_1}\frac{z - z_2 - 2z}{(z-z_2)^3} = -\lim_{z\to z_1}\frac{z+z_2}{(z-z_2)^3} =$

$$-\frac{z_1+z_2}{(z_1-z_2)^3} = -\frac{\frac{i}{b}(\sqrt{a^2-b^2} - a - a - \sqrt{a^2-b^2})}{\frac{i^3}{b^3}(\sqrt{a^2-b^2} - a + a + \sqrt{a^2-b^2})^3} = -\frac{ab^2}{4(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Demeuestre que puede aplicar el Teorema del residuo para llegar a: $I = 2\pi i\left(\frac{4i}{b^2}\right)(-)\frac{ab^2}{4(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2a\pi}{(\sqrt{a^2-b^2})^3}$

Problema 7

Demuestre que $I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4\cos\theta}d\theta = \frac{\pi}{12}$.

Solución

$z = e^{i\theta} \Rightarrow z^3 = e^{3i\theta},\ \frac{1}{z^3} = e^{-3i\theta},\ \cos(3\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right)$, luego aplique el resto de la teoría para llegar a $I = -\frac{1}{2i}\oint_{C^+=\{|z|=1\}} \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}dz$ y esta integral la calculamos en el ejercicio 11 del capítulo 16 y obtuvimos precisamente $I = \frac{\pi}{12}$.

Problema 8

Demuestre que $I = \int_0^{2\pi} \frac{4\cos\theta}{5 - 4\cos\theta}d\theta = \frac{4\pi}{3}$.

Solución

Aplicando la teoría correspondiente demuestre que

$$I = 2i\oint_{C^+=\{|z|=1\}} \frac{z^2+1}{z(2z^2-5z+1)}dz = \oint_{C^+} \frac{i(z^2+1)}{z(z-2)(z-1/2)}dz$$

Demuestre que las dos raíces del denominador que están en el interior de $C(z_1 = 0, z_2 = 1/2)$ son polos simples de $f(z)$ con $R_1 = i, R_2 = -\frac{5i}{3}$. Luego, aplique el Teorema de los Residuos para llegar a $I = 2\pi i \left(i - \frac{5i}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$.

Problema 9

Demuestre que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a + b\cos\theta)^2} = \frac{\pi a}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad a > b > 0.$

Solución

$\dfrac{1}{(a + b\cos\theta)^2}$ es función par $\Rightarrow \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a + b\cos\theta)^2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b\cos\theta)^2}$, luego siga un procedimiento similar al utilizado en el ejercicio 6.

Problema 10

Demostrar que $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta = \frac{\pi}{4}$

Solución

Aplicando la teoría correspondiente se llega a:

$$\begin{aligned} I &= \frac{i}{8}\oint_{C^+ = \{|z|=1\}} \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2 + \frac{5}{2}z + 1)} dz = \frac{i}{8}\oint_{C^+} \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z - z_1)(z - z_2)} dz \\ &= \frac{i}{8}\oint_{C^+} F(z) dz, \quad \text{con} \quad F(z) = \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z - z_1)(z - z_2)} \end{aligned}$$

Ahora,

$$z^2(z^2 + \tfrac{5}{2}z + 1) = 0 \leftrightarrow \begin{cases} z_0 &= 0 \\ z_1 &= -1/2 \\ z_2 &= -2 \end{cases}$$

Luego, sólo z_0 y z_1 están en el interior de C.
Demuestre que $z_0 = 0$ es polo de orden 2 de F y que $z_1 = -1/2$ es polo simple de F con $R_1 = 3/2$.

Ahora, para calcular R_0 se tiene que

$$\begin{aligned} R_0 &= Res(F; 0) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z^2-1)^2}{(z + \frac{1}{2})(z + 2)}\right] = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^2 + \frac{5}{2}z + 1}\right] \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{(4z^3 - 4z)(z^2 + \frac{5}{2}z + 1) - (z^4 - 2z^2 + 1)(2z + \frac{5}{2})}{(z^2 + \frac{5}{2}z + 1)^2} = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \frac{i}{8} 2\pi i \left(-\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Problema 11

Calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a(\cos\theta) + a^2}$ con a real ≥ 0

(a) Estudiar el caso $0 < a < 1$
(b) Estudiar el caso $a > 1$
(c) Estudiar el caso a=0

Solución

$z = e^{i\theta}, \;\; dz = ie^{i\theta}d\theta \qquad d\theta = \dfrac{dz}{iz} \;\; \Rightarrow \;\; d\theta = -\dfrac{idz}{z}$

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$

$$\frac{d\theta}{1-2a(\cos\theta)+a^2} = -\frac{idz}{z\left[1-a\left(z+\frac{1}{z}\right)+a^2\right]} = \frac{idz}{az^2-(1+a^2)z+a}$$

Por lo tanto $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a(\cos\theta)+a^2} = \oint_{|z|=1} \frac{idz}{az^2-(1+a^2)z+a}; \;\; f(z) = \frac{1}{az^2-(1+a^2)z+a}$

Las raices del denominador son $z_1 = a$, $z_2 = \dfrac{1}{a}$ (¡demuéstrelo!)

(a) Caso $0 < a < 1, \;\; \dfrac{1}{a} > 1$

Luego $f(z)$ tiene un solo punto singular $z_1 = a$ en $intC$. Demuestre que $z_1 = a$ es polo simple de $f(z)$ y que $R_1 = Res(f;a) = \dfrac{1}{a^2-1}$. Por lo tanto aplicando la teoría correspondiente (¡hágalo!) se tiene que la integral dada vale $i(2\pi i)\dfrac{1}{a^2-1} = \dfrac{2\pi}{1-a^2}$

(b) Caso $a > 1$, $\dfrac{1}{a} < 1$, la única singularidad de $f(z)$ en $intC$ es $z_2 = \dfrac{1}{a}$. Demeuestre que es un polo simple de f y que $R_2 = \dfrac{1}{(1-a^2)}$, por lo tanto, la integral dada vale, según la teoría correspondiente: $i(2\pi i)\dfrac{1}{1-a^2} = \dfrac{2\pi}{a^2-1}$

(c) Caso $a = 0, \;\; \displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$

Problema 12

Calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta$ con $-1 < a < 1$.

Solución

$\cos(2\theta) = \dfrac{1}{2}(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}), \;\; \cos\theta = \dfrac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}); \;\; z = ie^{i\theta} \Rightarrow cos(2\theta) = \dfrac{1}{2}\left(z^2 = \dfrac{1}{z^2}\right), \;\; cos(\theta) = \dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$

$dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta \;\; \Rightarrow \;\; d\theta = -i\frac{dz}{z}$

Así que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta = \int_{c+=\{z:|z|=1\}} \frac{z^2+z^{-2}}{2}\frac{1}{1-2a\frac{(z+z^{-1})}{2}+a^2}\frac{dz}{iz} = \int_{c+} \frac{(1+z^4)dz}{2iz^2(1-az)(z-a)}$

Los tres ceros del denominador son $z_1 = 0, \;\; z_2 = \dfrac{1}{a}, \;\; z_3 = a$ y como por hipótesis $-1 < a < 1$, sólo $z_1 = 0$ y $z_3 = a$ quedan dentro del círculo unitario $(|z| < 1)$.

Demuestre que $z_1 = 0$ es un polo de segundo orden y $z_3 = a$ es un polo de primer orden, para la función f, $f(z) = \dfrac{1+z^4}{2iz^2(1-az)(z-a)}$.

Demuestre que $R_1 = -\dfrac{(1+a^2)}{2ia^2}$ y $R_3 = \dfrac{(1+a^4)}{2ia^2(1-a^2)}$.

Ahora, aplicando el Teorema de los residuos (¡enúncielo Ud.!) se tiene que el valor de la integral es:

$2\pi i\left[\dfrac{1+a^4}{2ia^2(1-a^2)} - \dfrac{1+a^2}{2ia^2}\right] = \dfrac{2\pi a^2}{(1-a^2)}$.

Capítulo 18

Aplicación del Teorema de los Residuos al cálculo de algunas integrales impropias

Objetivos: Cálculo de algunos integrales impropias como aplicación del Teorema de los residuos, tales integrales aparecen al calcular en MA2114, por ejemplo, transformadas de Fourier de funciones racionales.

Se quiere calcular las integrales reales:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos(ax)\,dx \\ J &= \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{sen}\,(ax)\,dx \end{aligned}$$

con $a \geq 0$, $R(x)$ una función racional sin polos en el eje real, $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ y solo estudiaremos los casos en que

$\mathrm{grado\,Q(x)} \geq 1 + \mathrm{grado\,P(x)}$ para $a > 0$
$\mathrm{grado\,Q(x)} \geq 2 + \mathrm{grado\,P(x)}$ para $a = 0$

(en esta última situación, $\mathrm{sen}\,(ax) = 0,\ \cos(ax) = 1 \Longrightarrow \begin{cases} I &= \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx \\ J &= 0 \end{cases}$

Teoría

Consideremos $I + iJ = \int_{-\infty}^{\infty}[R(x)][\cos(ax) + i\,\mathrm{sen}\,(ax)]\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax}\,dx = K$.

La idea principal es integrar la función compleja $R(z)e^{iaz}$ a lo largo de una de las curvas cerradas que se muestran en la figura 18.1 (figura 18.1)

Vamos a trabajar aquí la curva de la izquierda, es decir, $C = [-r, r] \bigcup C_r$, recorrida en sentido positivo (antihorario), siendo C_r el arco de circunferencia desde $(r, 0)$ hasta $(-r, 0)$, pasando por $(0, ir)$.

Observemos que

$$\int_C R(z)e^{iaz}dz = \int_{-r}^{r} R(z)e^{iaz}dz + \int_{C_r} R(z)e^{iaz}dz \tag{18.1}$$

Ahora, como $f(z) = R(z)e^{iaz}$ es función analítica excepto en los ceros del denominador, podemos elegir r suficientemente grande para que los ceros que se encuentran en el semiplano superior queden en el interior de C, siendo C una curva de Jordan (sentido antihorario). Por el teorema de los residuos: $\displaystyle\int_C R(z)e^{iaz}dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \text{semiplano superior}} \mathrm{Res}(f(z); z_k)$ y por 18.1:

$$\int_C R(z)e^{iaz}dz = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} R(z)e^{iaz}dz + \lim_{r\to\infty}\int_{C_r} R(z)e^{iaz}dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \text{semipl. superior}} \mathrm{Res}(f(z); z_k)$$

Vamos a admitir que existe $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} R(z)e^{iaz}dz$ y que $\lim_{r\to\infty}\int_{C_r} R(z)e^{iaz}dz = O$

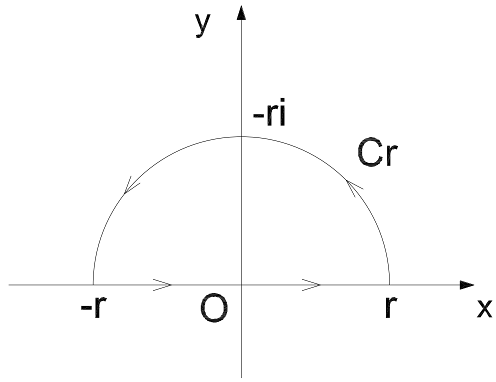


Figura 18.1:

Así, concluimos que, para $a \geq 0$,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} R(z)e^{iaz}dz = 2\pi i \sum_{z_k=\text{polos de } f \text{ en semipl. superior}} \operatorname{Res}(R(z)e^{iaz}; z_k)}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos(ax)dx &= \operatorname{Re}[2\pi \mathrm{i} \sum_{\mathrm{z_k}=\text{polos de } f\ \in\text{semipl. superior}} \operatorname{Res}(\mathrm{f(z)}; \mathrm{z_k})] \\ J &= \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\operatorname{sen}(ax)dx &= \operatorname{Im}[2\pi \mathrm{i} \sum_{\mathrm{z_k}=\text{polos de } f\ \in\text{semipl. superior}} \operatorname{Res}(\mathrm{f(z)}; \mathrm{z_k})] \end{aligned}$$

Para el caso $a < 0$, el procedimiento es análogo, observando que, ahora, $C = [-r, r] \bigcup C_r$ (en sentido horario) y $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = -2\pi i \sum_{z_k=\text{polos de } f \text{ en el semipl. inf.}} \operatorname{Res}(f(z); z_k)$ (figura 18.2)

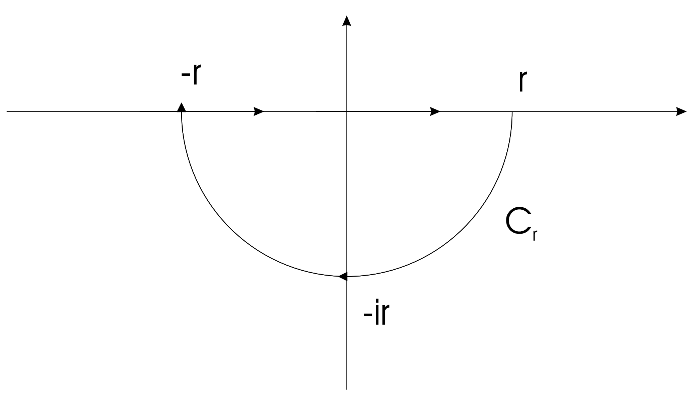


Figura 18.2:

Vamos a plantear las ideas formalmente con el siguiente

Teorema 24 *(a) Sea $f(z) = R(z)e^{iaz} = \dfrac{P(z)}{Q(z)}e^{iaz}$, con $a > 0$ y P y Q polinomios en z tales que $\operatorname{grado} \mathrm{Q} \geq 1 + \operatorname{grado} \mathrm{P}$. Sean $z_1, z_2, \ldots, z_p \in \mathbb{C}$ los puntos donde f no es analítica (ceros de $Q(z)$) y supongamos que existen constantes $M, R > 0$ tales que $|f(z)| \leq M/|z|$ para $|z| \geq R$. Entonces, se tiene que existe $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax}\,dx$ (en* *el sentido de que existen* $\lim_{b\to\infty}\int_0^b R(x)e^{iax}dx$ *y* $\displaystyle\lim_{b\to-\infty}\int_b^0 R(x)e^{iax}dx$*) y*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum_{z_k\in\text{semipl. sup.}} \mathrm{Res}(f(z);z_k) = K$$

$$\boxed{\begin{array}{lllll} I & = & \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos(ax)\,dx & = & \mathrm{ReK} \\ J & = & \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{sen}\,(ax)\,dx & = & \mathrm{ImK} \end{array}}$$

(b) En el caso $a<0$*, se reemplaza semiplano superior por semiplano inferior y se tiene* $I=\mathrm{Re}(-\mathrm{K});\ \mathrm{J}=\mathrm{Im}(-\mathrm{k})$

(c) Si $a=0,\ \mathrm{sen}\,(ax)=0,\ \cos(ax)=1$*;* $I=\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\,dx,\ \ J=0$*. En este caso, se supone que existen constantes* M *y* r *tales que* $|f(z)|\le\dfrac{M}{|z|^2}$ *para* $|z|>r$*. Aquí se exige que* $\mathrm{grado\,Q}\ge 2+\ \mathrm{grado\,P}$ *y se tiene:*

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\,dx = 2\pi i\sum_{z_k\in\text{semipl. sup.}}\mathrm{Res}(f(z);z_k)$$

Otro caso importante de integrales impropias de los tipos citados al comienzo, se presenta para $R(x)$ función racional con polos simples en el eje real (puede haber polos complejos); las demás condiciones sobre los grados de P y de Q son las mismas. Adicionalmente, en este caso los polos reales deben ser ceros de $\cos(ax)$ o de $\mathrm{sen}\,(ax)$.

Aquí, describiremos semicircunferencias $C_k(x_k,\varepsilon)$ (tantas como polos reales simples tenga $R(z)e^{iaz}$) alrededor de los polos x_k, $k=1,2,\ldots,m$.

Sea $C=C_r\cup(\bigcup_{j=1}^{m+1}S_j)\cup(\bigcup_{j=1}^{m}C_j)$, donde

$$\begin{array}{lll} S_1 & = & \text{intervalo } [-r,x_1-\varepsilon_1] \\ S_2 & = & \text{intervalo } [x_1+\varepsilon_1,x_2-\varepsilon_2] \\ S_3 & = & \text{intervalo } [x_2+\varepsilon_2,x_3-\varepsilon_3] \quad \text{(figura 18.3)} \\ & \vdots & \end{array}$$

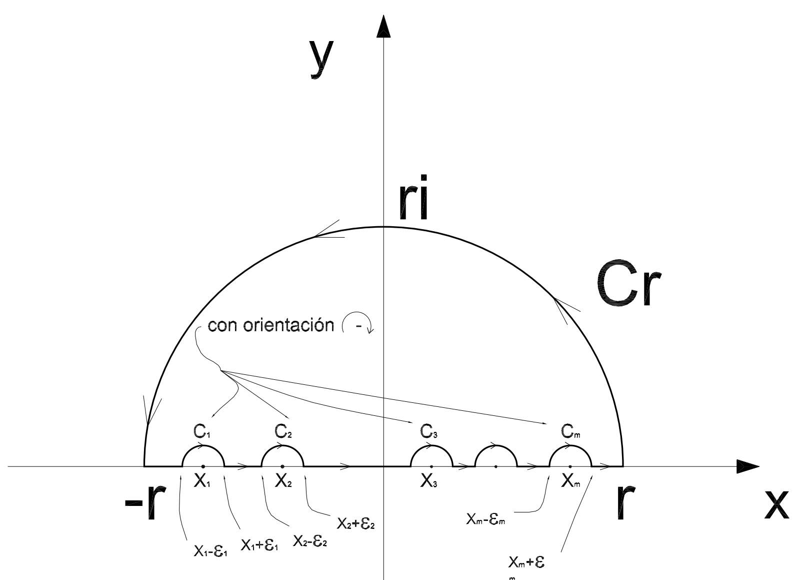


Figura 18.3:

Entonces, con r suficientemente grande para que los ceros complejos del denominador de $R(z)$ (que son polos complejos de $R(z)e^{iaz}$) queden en el semiplano superior y, tomando ε suficientemente pequeño, se demuestra que $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\lim_{\varepsilon_j\to 0}\int_{C_j} f(z)\,dz = -\pi i\sum_{j=1}^{m}\operatorname{Res}(f(z);x_j)$ y que $\displaystyle\sum_{j=1}^{m+1}\lim_{\substack{r\to\infty\\ \varepsilon_j\to 0}}\int_{S_j} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz$ y $\displaystyle\int_{C_r} f(z)\,dz = O$, pero como, por teorema de los residuos, $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{z_k\in\text{semipl. sup.}}\operatorname{Res}(f(z);z_k)$ y $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = \int_{C_r} f(z)\,dz + \sum_{j=1}^{m+1}\lim_{\substack{r\to\infty\\ \varepsilon_j\to 0}}\int_{S_j} f(z)\,dz + \sum_{j=1}^{m}\lim_{\varepsilon_j\to 0}\int_{C_j} f(z)\,dz$ queda, finalmente

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(z)e^{iaz}dz = 2\pi i\sum_{z_k\in\text{s. sup.}}\operatorname{Res}(R(z)e^{iaz};z_k) + \pi i\sum_{\substack{x_k=\text{ polos reales}\\ \text{de } R(z)e^{iaz}}}\operatorname{Res}(R(z)e^{iaz};x_k)$$

con $I = \operatorname{Re}[\cdots]$, $J = \operatorname{Im}[\cdots]$.

Nota 1 *Si en el eje real, se salta "sobre" los x_j con semicircunferencias por debajo, el resultado es el mismo, pero se cuentan los x_j como polos dentro de C (figura 18.4). La orientación en las semicircunferencias es ahora, en este caso, positiva.*

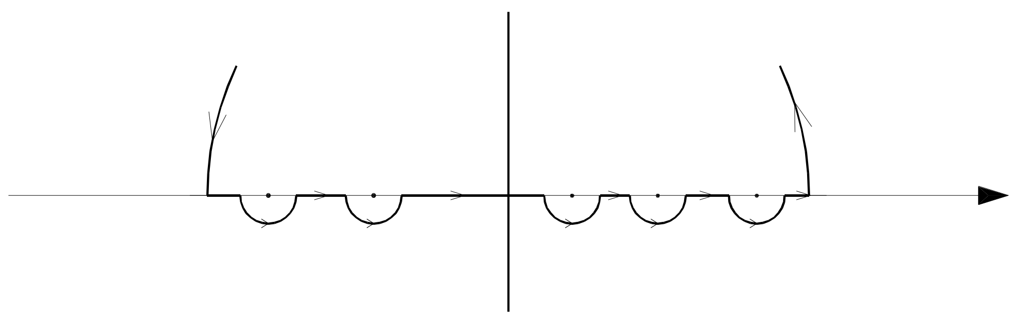


Figura 18.4:

Antes de presentar formalmente las ideas expuestas, vamos a dar la definición de Valor Principal de Cauchy:

Definición 11 *Si f es una función continua sobre $\mathbb{R}$, excepto en un número finito de números reales, $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, y si $\displaystyle\int_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx, \ldots, \int_{x_n+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,dx$ convergen para cada $\varepsilon > 0$ y si existe*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}+\varepsilon}^{x_n-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_n+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,dx\right]$$

y es finito, entonces, a este último límite lo llamamos Valor Principal de Cauchy de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \overset{\text{Notación}}{\overset{\downarrow}{\doteq}} VP(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx)$

Nota 2 *El VP de Cauchy puede existir aun cuando los sumandos de arriba no sean convergentes.*

Ahora presentamos el siguiente:

Teorema 25 *(a) Sea $f(z) = R(z)e^{iaz} = \dfrac{P(z)}{Q(z)}e^{iaz}$ con $a > 0$, $Q(z)$ polinomio ($P(z)$ también es un polinomio) con raices complejas y raices reales simples que sean ceros de $\cos(ax)$ o de $\operatorname{sen}(ax)$, con $\operatorname{grado Q} \geq 1 + \operatorname{grado P}$ y existen constantes M y r, $M, r > 0$, tales que para cada z con $\operatorname{Im z} \geq 0$ y $|z| \geq r$ se cumple que $|R(z)| \leq M/|z|$.*

Entonces existe $(VP)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{z_k \in \text{sem. sup.}} \operatorname{Res}(f(z); z_k) + \pi i \sum_{\substack{x_k \text{ polos reales} \\ \text{simples de } f(z)}} \operatorname{Res}(f(z); x_k)$ *y, si designamos al segundo miembro de la última expresión por* $K(z)$*, entonces*

$$\begin{array}{rcccl} I & = & \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos(ax)\,dx & = & \mathrm{ReK(z)} \\ J & = & \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{sen}\,(ax)\,dx & = & \mathrm{ImK(z)} \end{array}$$

(b) *Finalmente, en el caso* $a = 0,\ \mathrm{sen}\,(ax) = 0, \cos(ax) = 1,\ f(x) = R(x)e^{iax} = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$*, se exige que* $\mathrm{grado\,Q(x)} \geq 2 + \mathrm{grado\,P(x)}$. *Si* $Q(x)$ *tiene raices reales simples y raices complejas y, además, existen* $M, r > 0$ *tales que para cada* z *con* $\mathrm{Imz} \geq 0$ *y* $|z| > r$ *se tiene que* $\left|\dfrac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \dfrac{M}{|z|^2}$*, entonces se cumple que*

$$I = (VP)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{z_k \in \text{sem. sup.}} \operatorname{Res}(R(z); z_k) + \pi i \sum_{\substack{x_k \text{ polos reales} \\ \text{simples de } f(z)}} \operatorname{Res}(R(z); x_k)$$

.

18.1 Ejercicios Resueltos

Problema 32

(a) Sea $C_r = \{z \mid z = re^{it},\ t \in [o, \pi]\}$. Demuestre que $\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} \frac{ze^{iz}}{z^4+5z^2+4} dz = O$.

(b) Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{x^4+5x^2+4}\,dx$

Solución

(a) $z^4 + 5z^2 + 4 = O$. Hacer $z^2 = \mu$. Así, $\mu^2 + 5\mu + 4 = O \iff \mu_1 = -1,\ \mu_2 = -4 \iff z_1 = i,\ z_2 = -i,\ z_3 = 2i,\ z_4 = -2i \Longrightarrow z^4 + 5z^2 + 4 = (z^2+1)(z^2+4)$, con raices complejas.

Ahora bien, con r suficientemente grande se tiene: $|z^2+1|\,|z^2+4| \geq (r^2-1)(r^2-4)$, además $|e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| \Longrightarrow |e^{iz}| = |e^{-y+ix}| = |e^{-y}| < 1$. (Recuérdese que $|e^w| = e^{\mathrm{Rew}},\ w \in \mathbb{C}$).

Por lo tanto, $\left|\dfrac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\right| \leq \dfrac{|z|}{|r^2-1|\,|r^2-4|} = \dfrac{r}{(r^2-1)(r^2-4)}$. (Puesto que $|(z^2+1)(z^2+4)| \geq |r^2-1|\,|r^2-4|$)

Luego, $\left|\displaystyle\int_{C_r} \frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)} dz\right| \leq \displaystyle\int_{C_r} \left|\frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\right| |dz| \leq \frac{r(\pi-0)}{(r^2-1)(r^2-4)} = \frac{r\pi}{(r^2-1)(r^2-4)} \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} O$

(b) Sea $f(z) = \dfrac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)} = R(z)e^{iz}$. f es analítica en $\mathbb{C}\backslash\{i, -i, 2i, -2i\}$. Se elige entonces r suficientemente grande para que los polos de f en el semiplano superior queden en int C, $C = C_r \cup [-r, r]$ (sentido antihorario (figura 18.5).

Sabemos entonces que $a = 1 > 0,\ R(z) = \dfrac{z}{(z^2+1)(z^2+4)} = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ con $\mathrm{grado\,Q} = 4,\ \mathrm{grado\,P} = 1$ y, así, $\mathrm{grado\,Q} \geq 1 + \mathrm{grado\,P}$.

Luego, $\displaystyle\int_C R(z)e^{iz}dz = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(z)\,dz + \lim_{r\to\infty}\int_{C_r} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \text{sem. sup.}} \operatorname{Res}(f(z); z_k),\ z_1 = i,\ z_3 = 2i.$

En (a) se demostró que $\lim_{r\to\infty}\int_{C_r} f(z)\,dz = O$, luego, admitiendo que $\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(z)\,dz = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz$ nos queda $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}dz = 2\pi i(R_1 + R_3).$

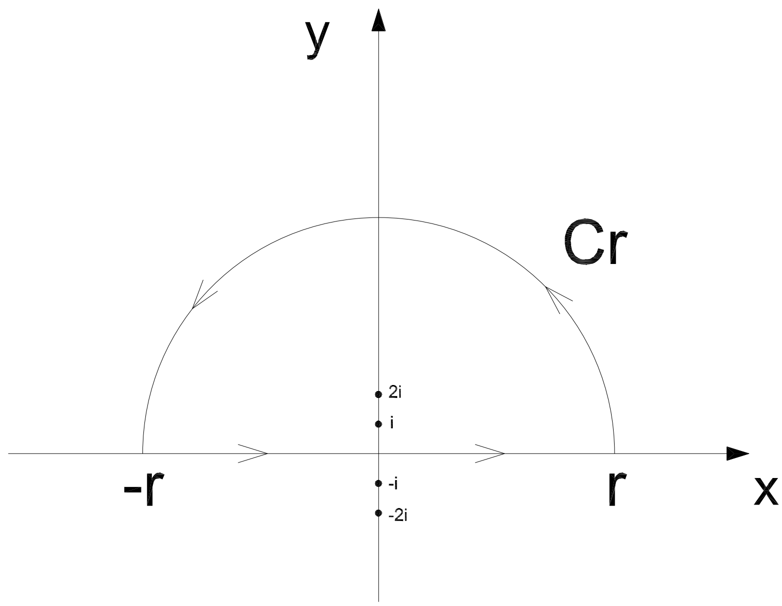


Figura 18.5:

Ahora, $R_1 = \operatorname{Res}(f(z);i) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \dfrac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}dz = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \dfrac{\frac{ze^{iz}}{(z+i)(z^2+4)}}{z-i}dz$ con $g(z) = \dfrac{ze^{iz}}{(z+i)(z^2+4)}$ analítica en el disco $|z-i| \leq 1/2$. Aplicamos ahora la fórmula integral de Cauchy para obtener $R_1 = \dfrac{1}{2\pi i} * 2\pi i g(i) = \dfrac{ie^{-1}}{2i*3} = \dfrac{e^{-1}}{6}$.

En forma análoga con $R_3 = \operatorname{Res}(f(z);2i) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z-2i|=\frac{1}{2}} \dfrac{\frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z+2i)}}{z-2i}dz$, se demuestra que $R_3 = -\dfrac{e^{-2}}{6}$.

(Se puede utilizar otro procedimiento. Por ejemplo, demuestre que z_1 y z_3 son polos simples de $R(z)e^{iz}$ y calcule los residuos).

Finalmente: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}dz = 2\pi i\frac{(e^{-1}-e^{-2})}{6} = \pi i\frac{(e^{-1}-e^{-2})}{3}$. Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^4+5x^2+4}\,dx = \operatorname{Im}(\frac{\pi}{3}\mathrm{i}(\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2})) = \frac{\pi}{3}(\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2})$$

(Nota: Si se pide $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^4+5x^2+4}\,dx$, el resultado es O).

Problema 33

Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^4+5x^2+4}dx$

Solución

Observar que $f(x) = \dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^4+5x^2+4} = \dfrac{(-x)(\operatorname{sen}(-x))}{(-x)^4+5(-x)^2+4} \Longrightarrow f$ es función par. (También, basta ver que el numerador es par por ser producto de dos funciones impares y que el denominador también es par. Luego, f, al ser cociente de funciones pares, es par).

Por lo tanto, la integral pedida es un medio del valor de la integral del ejercicio anterior.

Problema 34

Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+2}{x^2+1}e^{3ix}\,dx$

Solución

$\displaystyle\int_C \frac{z+2}{z^2+1}e^{3iz}dz = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} R(z)e^{3iz}dz + \lim_{r\to\infty}\int_{C_r} R(z)e^{3iz}dz$, siendo $C = C_r \cup [-r,r]$, r escogido suficientemente grande para que los polos simples de $R(z)$ del semiplano superior queden dentro de C. Aquí, $a = 3 > 0,\ \mathrm{grado}\,\mathrm{P} = 1,$ $\mathrm{grado}\,\mathrm{Q} = 2 \geq 1+1$, los ceros de z^2+1 son $z_1 = i,\ z_2 = -i$ y solo $z_1 \in$ int C (figura 18.6).

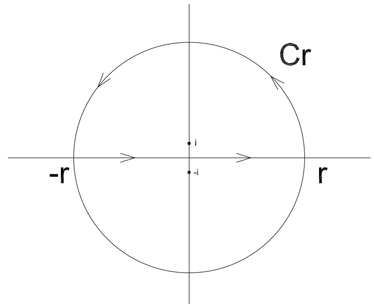


Figura 18.6:

Para variar, vamos a utilizar aquí un procedimiento distinto al del ejercicio 1 para el cálculo de residuos. Primero demostraremos que $z_1 = i$ es polo simple de $R(z)e^{3iz}$, luego calcularemos R_1.

$\lim\limits_{z\to i}[(z-i)\dfrac{z+2}{z^2+1}e^{3iz}] = \lim\limits_{z\to i}[\dfrac{z+2}{z+i}e^{3iz}] = \dfrac{i+2}{2i}e^{-3} \neq O \Longrightarrow z_1 = i$ es polo simple de $f(z)$ y $\mathrm{Res}(f(z);i) = \dfrac{i+2}{2i}e^{-3}$.

Finalmente se demuestra que $\lim\limits_{r\to\infty}\displaystyle\int_{-r}^{r} R(z)e^{3iz}dz = \int_{-\infty}^{\infty} R(z)e^{3iz}dz$ y $\lim\limits_{r\to\infty}\displaystyle\int_{C_r} R(z)e^{3iz}dz = O$ y, aplicando el teorema de los residuos, nos queda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(z)e^{3iz}dz = 2\pi i\frac{i+2}{2i}e^{-3} = 2\pi e^{-3} + \pi e^{-3}i$$

De modo que la integral requerida, digamos J, vale $J = \pi e^{-3}$.
(Obsérvese que, además, $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+2}{x^2+1}\cos(3x)\,dx = 2\pi e^{-3}$).

Problema 35
Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\ (3x)}{x^3+x}\,dx$

Solución
$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\ (3x)}{x(x^2+1)}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\ (3x)}{x(x^2+1)}\,dx$ en virtud de que tanto el numerador, $\mathrm{sen}\ (3x)$, como el denominador, $x(x^2+1)$ son funciones impares y el cociente de funciones impares es par. Ahora, $x(x^2+1) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = i,\ x_3 = -i$; $a = 3 > 0,\ \mathrm{grado}\,\mathrm{P} = 0,\ \mathrm{grado}\,\mathrm{Q} = 3 \geq 1+0$. Además, las raices del denominador de $R(x)$ son una real y dos complejas y $x_1 = 0$ es raiz de $\mathrm{sen}\ (3x)$.

Se construye $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3iz}}{z(z^2+1)}dz$, se toma r suficientemente grande para que $z_2 = i$ esté en int C, con $C = C_r \cup [-r,-\varepsilon] \cup C_1 \cup [\varepsilon, r]$, escogiendo ε suficientemente pequeño y con $f(z) = R(z)e^{3iz}$, se llega a (figura 18.7):

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{C_r} f(z)\,dz + \int_{-r}^{-\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{\varepsilon}^{r} f(z)\,dz$$

Se demuestra que $\lim\limits_{r\to\infty}\displaystyle\int_{C_r} f(z)\,dz = O$ y $\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\displaystyle\int_{-r}^{-\varepsilon} f(z)\,dz + \lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{\varepsilon}^{r} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz$.

Se demuestra también que $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = -\pi i\,\mathrm{Res}(f(z);z_1)$. Finalmente, aplicando el teorema de los residuos a $\displaystyle\oint_C f(z)\,dz$ (recorrida en sentido antihorario) se obtiene $2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z);z_2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz - \pi i\,\mathrm{Res}(f(z);z_1) \Longrightarrow$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = 2\pi i R_2 + \pi i R_1$, siendo $R_1 = \mathrm{Res}(f(z);O)$ y $R_2 = \mathrm{Res}(f(z);i)$.

Demuestre que $z_1 = O$ y $z_2 = i$ son polos simples de $f(z)$ y que $R_1 = 1$ y $R_2 = -\dfrac{e^{-3}}{2}$.

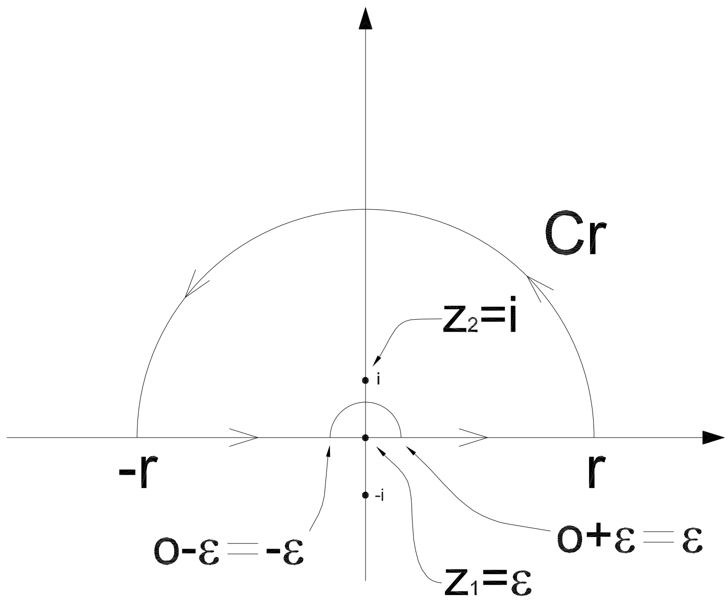


Figura 18.7:

Así, $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = 2\pi i(\frac{e^{-3}}{2}) + \pi i$.

Por tanto, $J = \int_{0}^{\infty} \frac{\text{sen }(3x)}{x^3+x}dx = \frac{1}{2}[\,\mathrm{Im}(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f(z)\,dz})] = \frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-3})$.

Problema 36

(a) Calcular $\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} \frac{e^{iz/2}}{(z^2+4)(z-\pi)}dz$, siendo C_r la semicircunferencia superior con centro en O y radio r.

(b) Calcular $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_1} \frac{e^{iz/2}}{(z^2+4)(z-\pi)}dz$, donde C_1 es la semicircunferencia que va desde el punto $\pi-\varepsilon$ al punto $\pi+\varepsilon$ pasando por $\pi+i\varepsilon$.

(c) Calcular $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz/2}}{(z^2+4)(z-\pi)}dz$

Solución

$(z^2+4)(z-\pi) = O \iff z_1 = 2i,\, z_2 = -2i,\, x_1 = \pi$, luego $f(z) = R(z)e^{iz/2} = \frac{P(z)}{Q(z)}e^{iz/2} = \frac{1}{(z^2+4)(z-\pi)}e^{iz/2}$ es analítica en $\mathbb{C}\backslash\{z_1, z_2, x_1\}$ con $z_1 = 2i$ en el semiplano superior y $x_1 = \pi$ real, raiz simple de $Q(z)$. Además, $a = \frac{1}{2} > 0,\ \mathrm{grado\,P} = 0,\ \mathrm{grado\,Q} = 3 \geq 1+0$ y $x_1 = \pi$ es cero de $\cos(\frac{x}{2})$. (figura 18.8)

(a) $\int_{C_r} f(z)\,dz = \int_{C_r} \frac{e^{\frac{1}{2}iz}}{(z^2+4)(z-\pi)}dz$.

Ahora, $|e^{\frac{1}{2}iz}| = |e^{\frac{1}{2}i(x+iy)}| = |e^{-\frac{y}{2}+i\frac{x}{2}}| = e^{-\frac{y}{2}} < 1$.

También se tiene que $|z^2+4|\,|z-\pi| \geq (r^2+4)(r-\pi)$.

Luego, $|\int_{C_r} f(z)\,dz| \leq \int_{C_r} \frac{1}{(r^2+4)(r-\pi)}|dz| \leq \frac{\pi}{(r^2-4)(r-\pi)} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y, por tanto, $\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} f(z)\,dz = 0$.

(b) Demostremos que $f(z)$ tiene polo simple en $x_1 = \pi$.

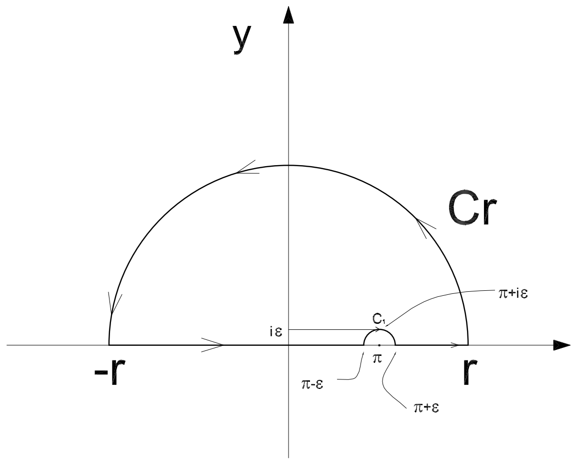


Figura 18.8:

Estudiemos $\lim_{z\to\pi}\dfrac{(z-\pi)e^{iz/2}}{(z^2+4)(z-\pi)} = \lim_{z\to\pi}\dfrac{e^{iz/2}}{z^2+4} = \dfrac{e^{i\pi/2}}{\pi^2+4} \neq O \Longrightarrow$ existe el límite y es distinto de cero $\Longrightarrow$ $x_1=\pi$ es polo simple de f y $R_3 = \dfrac{e^{i\pi/2}}{\pi^2+4} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}}{\pi^2+4} = \dfrac{i}{\pi^2+4}$.

Ahora, al ser π polo simple de $f(z)$, se puede escribir $f(z) = \operatorname{Res}(f(z);\pi)\displaystyle\int_{C_1}\frac{dz}{z-\pi}+\int_{C_1}g(z)\,dz$ con g analítica en entorno (vecindad) de π

$\Longrightarrow \displaystyle\int_{C_1}f(z)\,dz = \operatorname{Res}(f(z);\pi)*(-\frac{2\pi i}{2})+\int_{C_1}g(z)\,dz \Longrightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_1}f(z)\,dz = -\pi i\operatorname{Res}(f(z);\pi)+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_1}g(z)\,dz.$

Además, g analítica en $V(\pi)\Longrightarrow g$ continua y, por lo tanto, acotada en $V(\pi)\Longrightarrow |\displaystyle\int_{C_1}g(z)\,dz| \leq \int_{C_1}|g(z)|\,dz \leq$ M long $(C_1) = M\pi\varepsilon$ (Ver ejercicio 21 del capítulo 14) y como $M\pi\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$, queda: $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_1}f(z)\,dz = -\pi i *$ $\dfrac{i}{\pi^2+4} = \dfrac{\pi}{\pi^2+4}$

(c) $\displaystyle\int_{-r}^{\pi-\varepsilon}f(z)\,dz+\int_{\pi+\varepsilon}^{r}f(z)\,dz+\int_{C_1}f(z)\,dz+\int_{C_r}f(z)\,dz = 2\pi i\operatorname{Res}(f(z);2i)$

$\displaystyle\lim_{\substack{r\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left[\int_{-r}^{\pi-\varepsilon}f(z)\,dz+\int_{\pi+\varepsilon}^{r}f(z)\,dz\right]+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_1}f(z)\,dz+\lim_{r\to\infty}\int_{C_r}f(z)\,dz = 2\pi iR_1 = \int_{-\infty}^{\infty}f(z)\,dz+\frac{\pi}{\pi^2+4} \Longrightarrow$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\,dz = 2\pi iR_1-\frac{\pi}{\pi^2+4}$

Si Ud. demuestra que $z_1=2i$ es polo simple de $f(z)$ y que $R_1 = -\dfrac{1}{4e(2-\pi i)} = \dfrac{-1}{4e}\dfrac{2+\pi i}{4+\pi^2}$, se llega, finalmente, a $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\,dz = -2\pi i\frac{1}{4e}\frac{2+\pi i}{4+\pi^2}-\frac{\pi}{\pi^2+4} = U$ y, así

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x/2)}{(x^2+4)(x-\pi)}\,dx = \mathrm{ImU} = -\frac{\pi(\pi+2\mathrm{e})}{2\mathrm{e}(\pi^2+4)}$$

Problema 37

Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+9)^2}dx$

Solución

$a = 1 > 0,\ \text{grado}\,\mathrm{P} = 0,\ \text{grado}\,\mathrm{Q} = 4 \geq 1 + 0.\ z_1 = 3i,\ z_2 = -3i$ son los ceros de $Q(x)$, sólo $z_1 \in$ semipl. sup. Demuestre que $z_1 = 3i$ es polo doble de $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+9)^2}$ y que $R_1 = -\dfrac{i}{27e}$.

Demuestre finalmente que la integral dada vale $\pi e^{-3}/27$.

Problema 38

Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx$

Solución

$a = 0,\ \text{grado}\,\mathrm{P} = 2,\ \text{grado}\,\mathrm{Q} = 4 \geq 2 + 2.$

$z_1 = i,\ z_2 = -i,\ z_3 = 3i, z_4 = -3i$ son singularidades de $R(x)$, pero sólo z_1 y z_3 están en el semiplano superior.

Demuestre que z_1 y z_3 son polos simples de $R(z)$ con $R_1 = i/16$, $R_3 = -3i/16$.

Demuestre finalmente que la integral requerida vale $\pi/4$.

Problema 39

Demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \operatorname{sen}(3x)}{(x^2+4)^2}\,dx = -2\pi e^{-6}$

Solución

Se deja como ejercicio.

Problema 40

Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

Solución

En el ejercicio 15 del capítulo 16, se encontraron las raices de $x^4+1=0$: $z_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),\ z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1-i),\ z_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$. Ahora, sólo z_0 y z_1 están en el semiplano superior. Queda como ejercicio demostrar que ambos son polos simples de $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$ y que los residuos respectivos son: $R_0 = -\dfrac{1}{4}e^{\frac{\pi i}{4}},\ R_1 = \dfrac{1}{4}e^{-\frac{\pi i}{4}}$.

Demuestre, finalmente, que la integral dada vale $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

Problema 41

(a) Si $f(z) = \dfrac{1}{z^6+1}$ y C_r es la semicircunferencia descrita por $z = re^{i\theta},\ \theta \in [0,\pi]$, demuestre que $|f(z)| \leq \dfrac{M}{r^2}$

(b) Demuestre que, como $|f(z)| \leq \dfrac{2}{r^2}$, entonces se cumple que $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} f(z)\,dz = 0$.

(c) Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$

Solución

(figura 18.9).

(a) $|f(z)| = |\dfrac{1}{r^6 e^{6i\theta}+1}| \leq \dfrac{1}{|r^6 e^{6i\theta}|-1} = \dfrac{1}{r^6-1} \leq \dfrac{2}{r^6} < \dfrac{2}{r^2}$, siempre que r sea suficientemente grande (por ejemplo, $r > 2$). Así, $M = 2$ y se cumple la propiedad. (Se utilizaron los hechos $|e^{6i\theta}| = |\cos(6\theta) + i \operatorname{sen}(6\theta)| = 1$, $|w_1 + w_2| \geq |w_1| - |w_2|$)

(b) $|\displaystyle\int_{C_r} f(z)\,dz| \leq \int_{C_r} |f(z)|\,dz \leq \dfrac{2}{r^2} * \pi r = \dfrac{2\pi}{r} \xrightarrow{r\to\infty} 0$ (Hemos utilizado la parte (a) y la desigualdad ML: Ejercicio 21 del capítulo 14)

(c) $z^6 + 1 = O \Longleftrightarrow z_0 = e^{\frac{\pi i}{6}},\ z_1 = e^{\frac{3\pi i}{6}},\ z_2 = e^{\frac{5\pi i}{6}},\ z_3 = e^{\frac{7\pi i}{6}},\ z_4 = e^{\frac{9\pi i}{6}},\ z_5 = e^{\frac{11\pi i}{6}}$.

Demuestre que sólo $z_0,\ z_1$ y z_2 están en int$\,C$, siendo $C = C_r \cup [-r, r]$, al elegir r suficientemente grande. (figura 18.10).

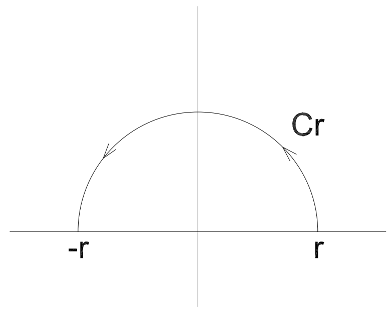


Figura 18.9:

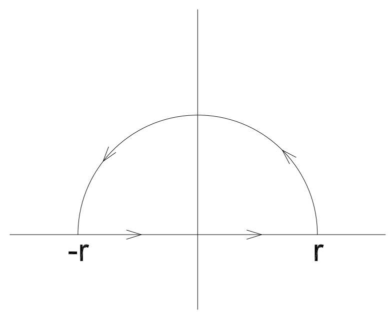


Figura 18.10:

Demuestre también que z_0, z_1, z_2 son polos simples de $f(z) = \dfrac{1}{z^6+1}$ y que sus residuos respectivos son: $R_0 = \dfrac{1}{6}e^{-\frac{5\pi i}{6}}$, $R_1 = \dfrac{1}{6}e^{-\frac{5\pi i}{2}}$, $R_2 = \dfrac{1}{6}e^{-\frac{25\pi i}{6}}$. De modo que, por el teorema de los residuos

$$\oint_C \frac{dz}{z^6+1} = 2\pi i(\frac{1}{6})(e^{-\frac{5\pi i}{6}} + e^{-\frac{5\pi i}{2}} + e^{-\frac{25\pi i}{6}}) = \frac{2\pi}{3}$$

pero por otro lado

$$\oint_C \frac{dz}{z^6+1} = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} \frac{dz}{z^6+1} + \lim_{r\to\infty}\int_{C_r} \frac{dz}{z^6+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^6+1} + O$$

Luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \mathrm{Re}(\oint_{\mathrm{C}} \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{z}^6+1}) = \frac{2\pi}{3}$$

Problema 42
Demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^4+x^3+x^2+x}\, dx = \frac{\pi}{2}[2 - \frac{1}{e} - \cos(1)]$
Solución
Se deja como ejercicio

Problema 43
Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$
Solución
Esta integral es muy particular debido a que como $\dfrac{e^{iz}}{z}$ tiene un polo simple en $z_0 = O$ solamente, entonces se tiene que

$$\int_{C=C_r\cup[-r,-\varepsilon]\cup C_\varepsilon\cup[\varepsilon,r]} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{C_r} f(z)\,dz + \int_{-r}^{-\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\varepsilon}^{r} f(z)\,dz$$

con $f(z) = \frac{1}{z}e^{iz} = \frac{P(x)}{Q(x)}e^{iz}$, $a = 1 > 0,\ \text{grado P} = 0,\ \text{grado Q} = 1 \geq 1 + 0$ (figura 18.11). pero la suma de las 4

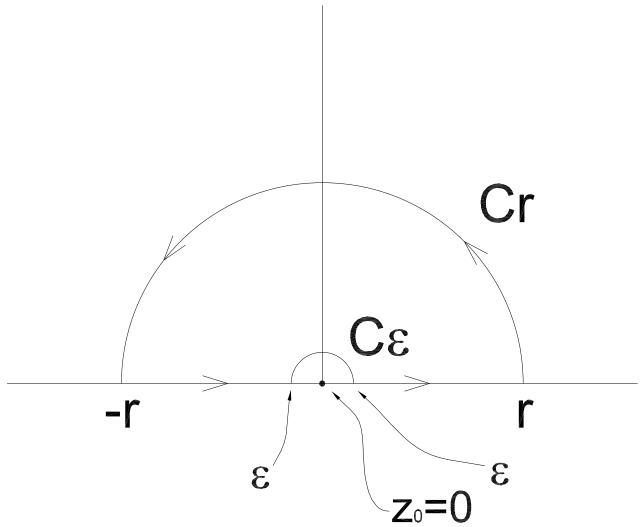


Figura 18.11:

integrales del segundo miembro es O por estar O fuera del int C y f ser analítica en $\mathbb{C}\backslash\{O\}$.

Luego,

$$\begin{aligned}
O &= \lim_{r\to\infty}\int_{C_r} f(z)\,dz + \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ r\to\infty}}\int_{-r}^{-\varepsilon} f(z)\,dz + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(z)\,dz + \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ r\to\infty}}\int_{\varepsilon}^{r} f(z)\,dz \\
&= O + \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ r\to\infty}}\int_{-r}^{-\varepsilon} f(z)\,dz - \frac{1}{2} * 2\pi i * e^{O} + \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ r\to\infty}}\int_{\varepsilon}^{r} f(z)\,dz \\
&= O - \pi i + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx\right)
\end{aligned}$$

término último que es un (VP), el cual no es necesario para $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ ya que se puede poner $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ para $x = 0$, pero sí es necesario para $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx$, integral impropia que no existe. Ahora, (VP) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ r\to\infty}}(\int_{-r}^{-\varepsilon}\frac{\cos x}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{r}\frac{\cos x}{x}dx) = 0$. (Obsérvese que $\lim_{\substack{\delta\to 0\\ R\to\infty}}\int_{-R}^{-\delta}\frac{\cos x}{x}dx + \lim_{\substack{\delta^*\to 0\\ R^*\to\infty}}\int_{R^*}^{\delta^*}\frac{\cos x}{x}dx$ no existe).

De modo que, finalmente $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz}}{z}dz = \pi i$ y, así

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \pi$$

Problema 44

Demostrar que $\int_0^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$

Solución

$\int_0^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 dx$ ya que $\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2$ es una función par.

Ahora, $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \frac{1-\cos(2x)}{2}\frac{1}{x^2}$ y, por tanto, $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(2x)}{4x^2}\,dx$ y se aplica el método conocido, para $f(z) = \frac{1-e^{2iz}}{4z^2}$ con $z_0 = O$. Demuestre que es un polo simple de $f(z)$ y que $R_0 = -\frac{i}{2}$. Así,

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 dx = \operatorname{Im}(\pi\mathrm{i} * (-\frac{\mathrm{i}}{2})) = \frac{\pi}{2}$$

Problema 45

Demuestre que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}dx = \frac{b-a}{2}\pi$ siendo $a, b > 0$

Solución

Se deja como ejercicio (Ayuda: Descomponer en suma de dos integrales ...).

Problema 46

Demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\text{sen } m(x-a)]*[\text{sen } n(x-b)]}{(x-a)(x-b)}\,dx = \dfrac{\text{sen } n(a-b)}{a-b}$ con $m > n > 0$, $a > b > 0$

Solución

Se deja como ejercicio. (Ayuda: Primero transforme $(\text{sen } A)(\text{sen } B)$ en una diferencia de cosenos utilizando la fórmula $\cos\alpha - \cos\beta = -2\,\text{sen}\,(\dfrac{\alpha+\beta}{2})\,\text{sen}\,(\dfrac{\alpha-\beta}{2})$).

Problema 47

(a) Demostrar que $\lim_{r\to\infty}\int_{C_r}\frac{z^2}{z^4+1}dz = O$, con C_r la semicircunferencia descrita por $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0,\pi]$. (figura 18.12).

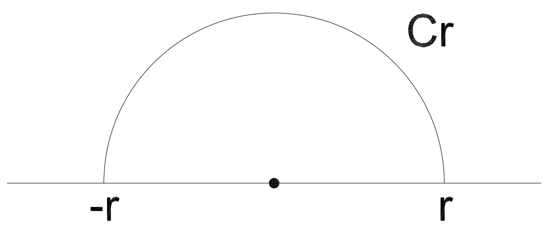


Figura 18.12:

(b) Demuestre que $\lim_{r\to\infty}(2\int_0^r f(z)\,dz + 2\int_{C_r} f(z)\,dz) = 2\displaystyle\int_0^{\infty} f(z)\,dz$, con $f(z) = \dfrac{z^2}{z^4+1}$.

(c) Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx$.

Solución

(a) $|\dfrac{z^2}{z^4+1}| \leq \dfrac{|z^2|}{|z^4+1|} \leq \dfrac{r^2}{r^4-1}$ puesto que $|z^4+1| \geq |z|^4 - 1$.

Luego, $|\displaystyle\int_{C_r}\frac{z^2}{z^4+1}dz| \leq \int_{C_r}\frac{|z|^2}{|z^4+1|}ds \leq \int_{C_r}\frac{r^2}{r^4-1}ds = \frac{\pi r^3}{r^4-1} \xrightarrow{r\to\infty} 0$ (Hemos usado la desigualdad MI)

(b) Por (a), $2\lim_{r\to\infty}\int_{C_r} f(z)\,dz = O$ y, admitiendo que $2\lim_{r\to\infty}\int_0^r f(z)\,dz = 2\int_0^{\infty} f(z)\,dz$ queda demostrado lo pedido.

(c) Sea $f(z) = \dfrac{z^2}{z^4+1}$. Por el ejercicio (9) conocemos las raices de $z^4+1 = O$ y sabemos que en el semiplano superior sólo están $z_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, que son polos simples de $f(z) = \dfrac{z^2}{z^4+1}$ (¡Demuéstrelo!) con sus respectivos residuos $R_0 = \dfrac{1}{4\sqrt{i}}$, $R_1 = \dfrac{1}{4i\sqrt{i}}$ y como $i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}$, $\sqrt{i} = \cos(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2k\pi}{2}) + i\,\text{sen}\,(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2k\pi}{2})$; $k = 0, 1$. Así, $\sqrt{i} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

Por lo tanto, $R_0 + R_1 = \dfrac{i+1}{4i\sqrt{i}} = \dfrac{\pi(i+1)}{2\sqrt{i}} = \dfrac{\pi(i+1)}{\sqrt{2}(i+1)} = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Finalmente, $\oint_{C=[-r,r]\cup C_r} f(z)\,dz = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = 2\lim_{r\to\infty}(\int_0^r f(z)\,dz + \int_{C_r} f(z)\,dz) = 2\int_0^\infty f(z)\,dz$, de donde

$$\int_0^\infty f(z)\,dz = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

Bibliografía

Parte I. (Teoría de Superficies)

1. **Apostol, Tom**
   Cálculo — Segunda edición,
   Editorial: Xerox College Publishing.

2. **Marsden, Jerrold E.** y **Tromba, Anthony J.**
   Cálculo Vectorial — Tercera Edición,
   Editorial: Addison-Wesley Iberoamericana.

Parte II. (Teoría de Variable Compleja)

1. **Derrick, William R.**
   Introductory Complex and Analysis Applications,
   Editorial: Academic Press New York and London.

2. **Etcheberry, Alain**
   Elementos de Variable Compleja (MA2113, Matemáticas 6)
   Universidad Simón Bolívar, Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas.

3. **Marsden, Jerrold E.**
   Basic Complex Analysis,
   Editorial: Freeman.

4. Ejercicios publicados por profesores del Departamento de Matemáticas de la U.S.B.

5. Exámenes efectuados por el Departamento de Matemáticas de la U.S.B.

6. Ejercicios publicados por preparadores del Departamento de Matemáticas de la U.S.B.